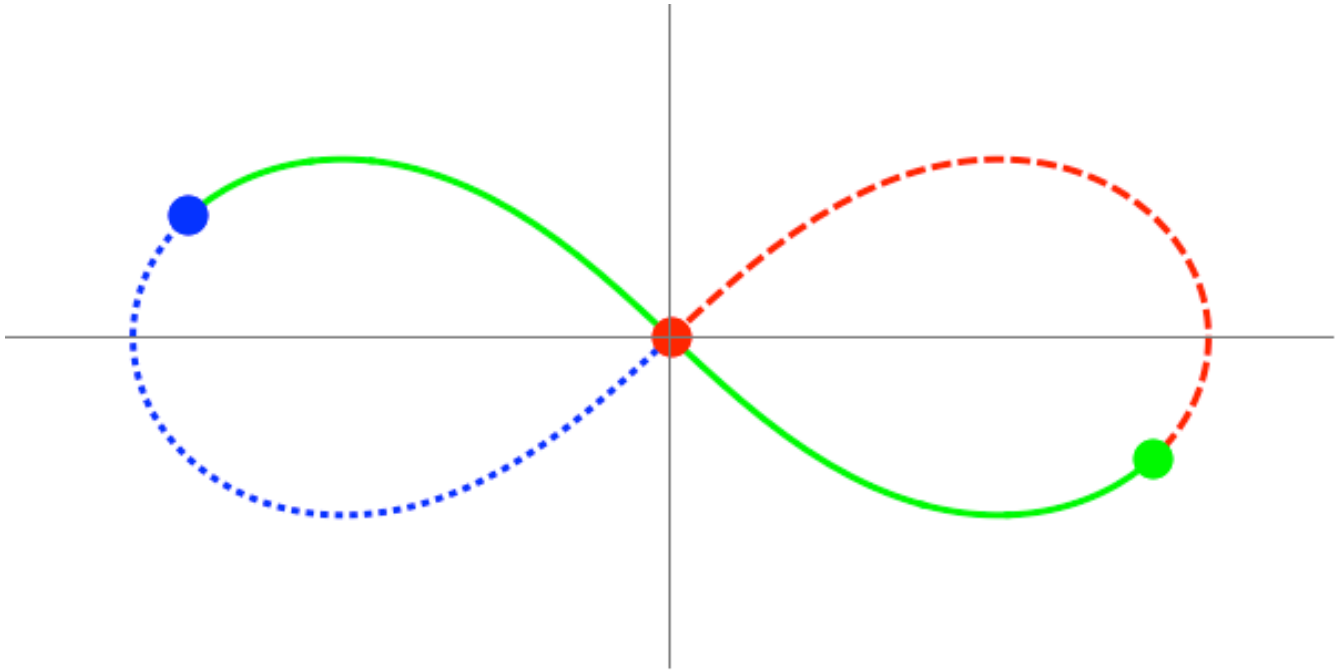
複素時間平面上の三体8の字解

藤原俊朗

2016年1月18日

北里大学一般教育部

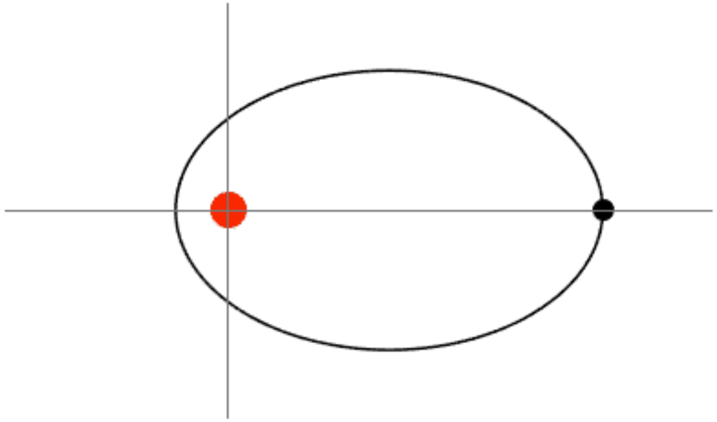
三体8の字解

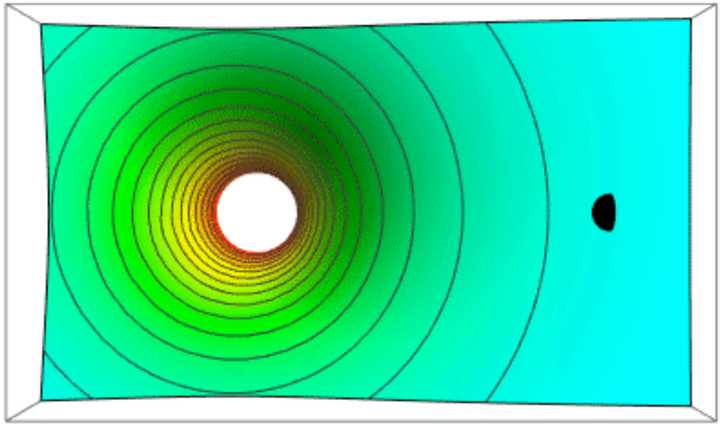


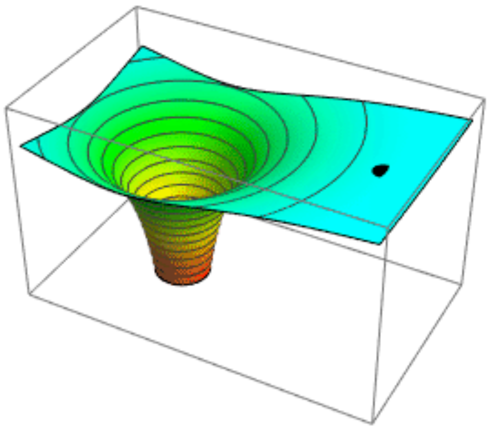
Chenciner & Montgomery, 2000

2001/06/13 夕刊

一体問題







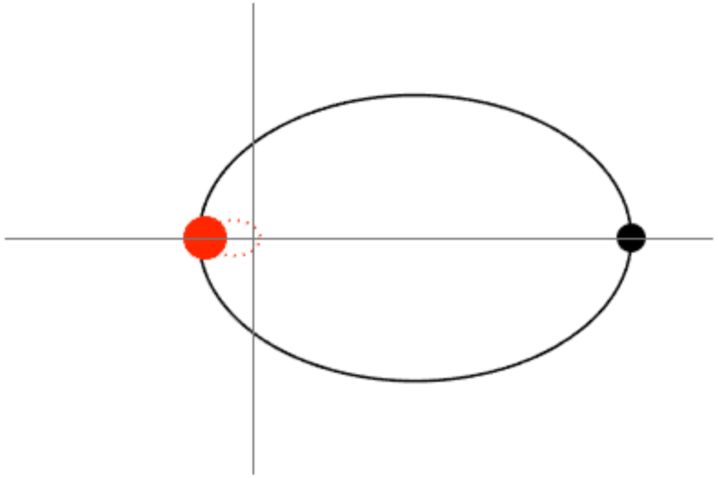
重い星は動かない

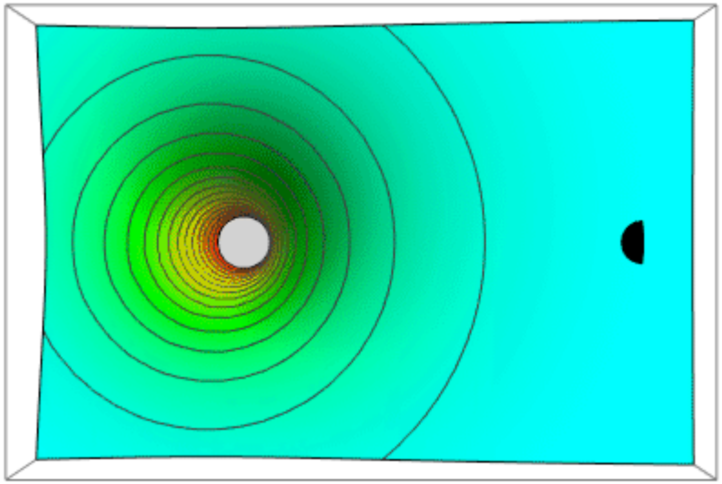
解ける

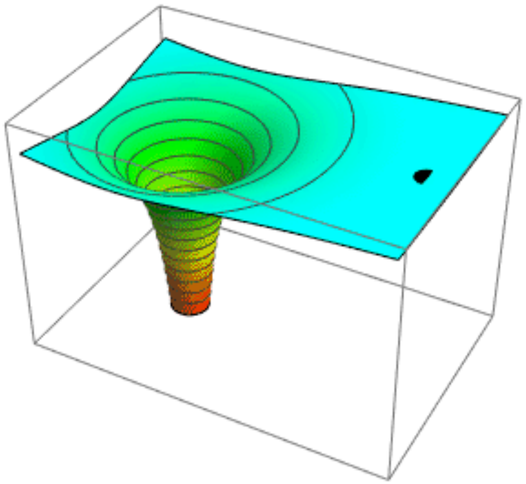
質量の比は 無限大:1

このモデルは正確ではないが，定性的な理解には良い

二体問題







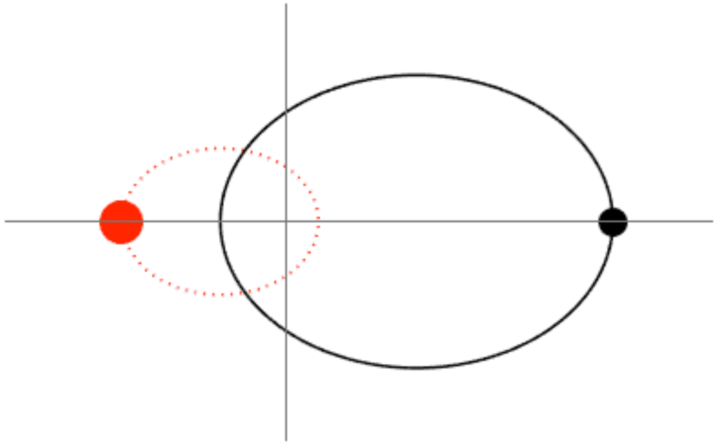
重い星も動く

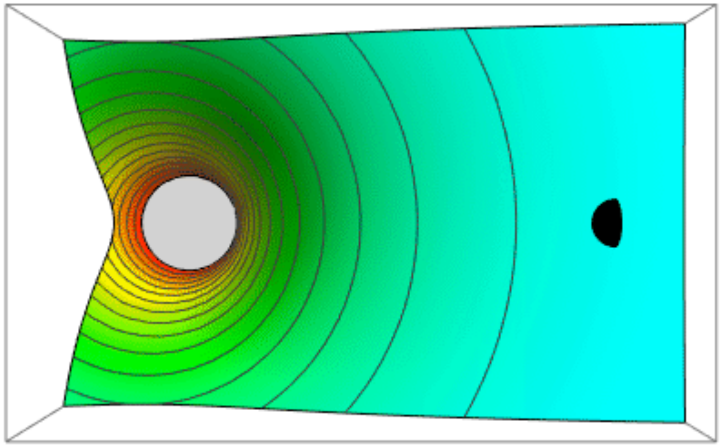
解ける

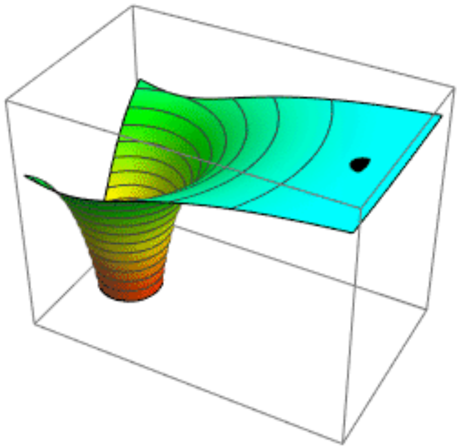
質量の比は 8:1

このモデルは正確ではないが，定性的な理解には良い

二体問題





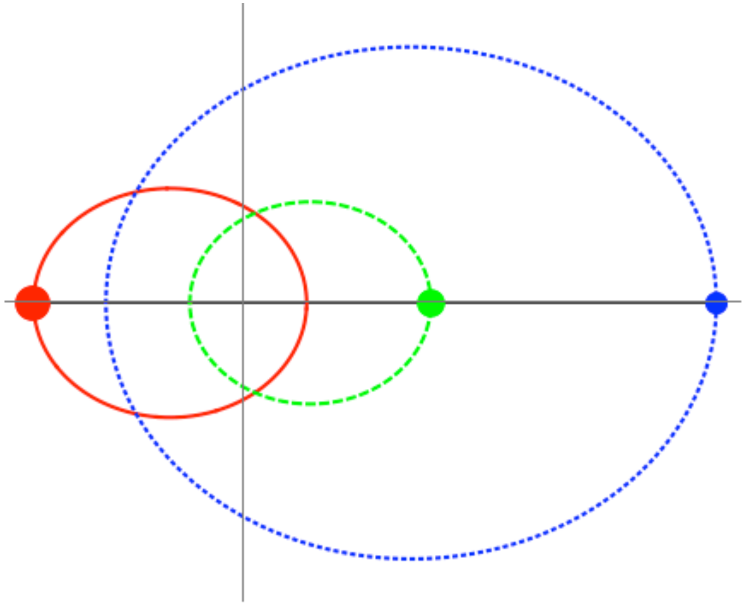


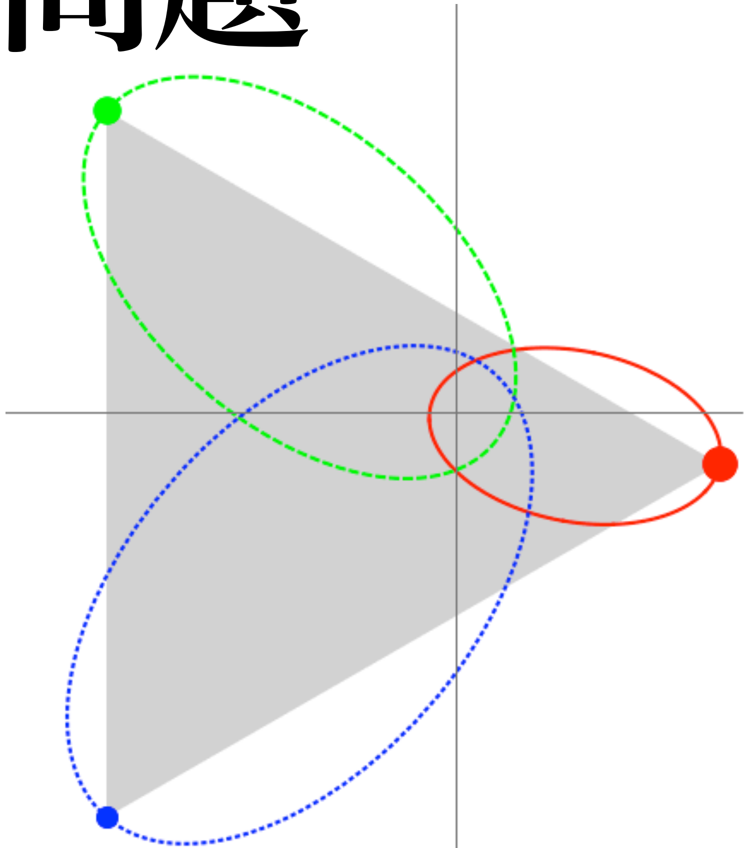
重い星も動く
解ける

質量の比は 2:1

このモデルは正確ではないが，定性的な理解には良い

三体問題



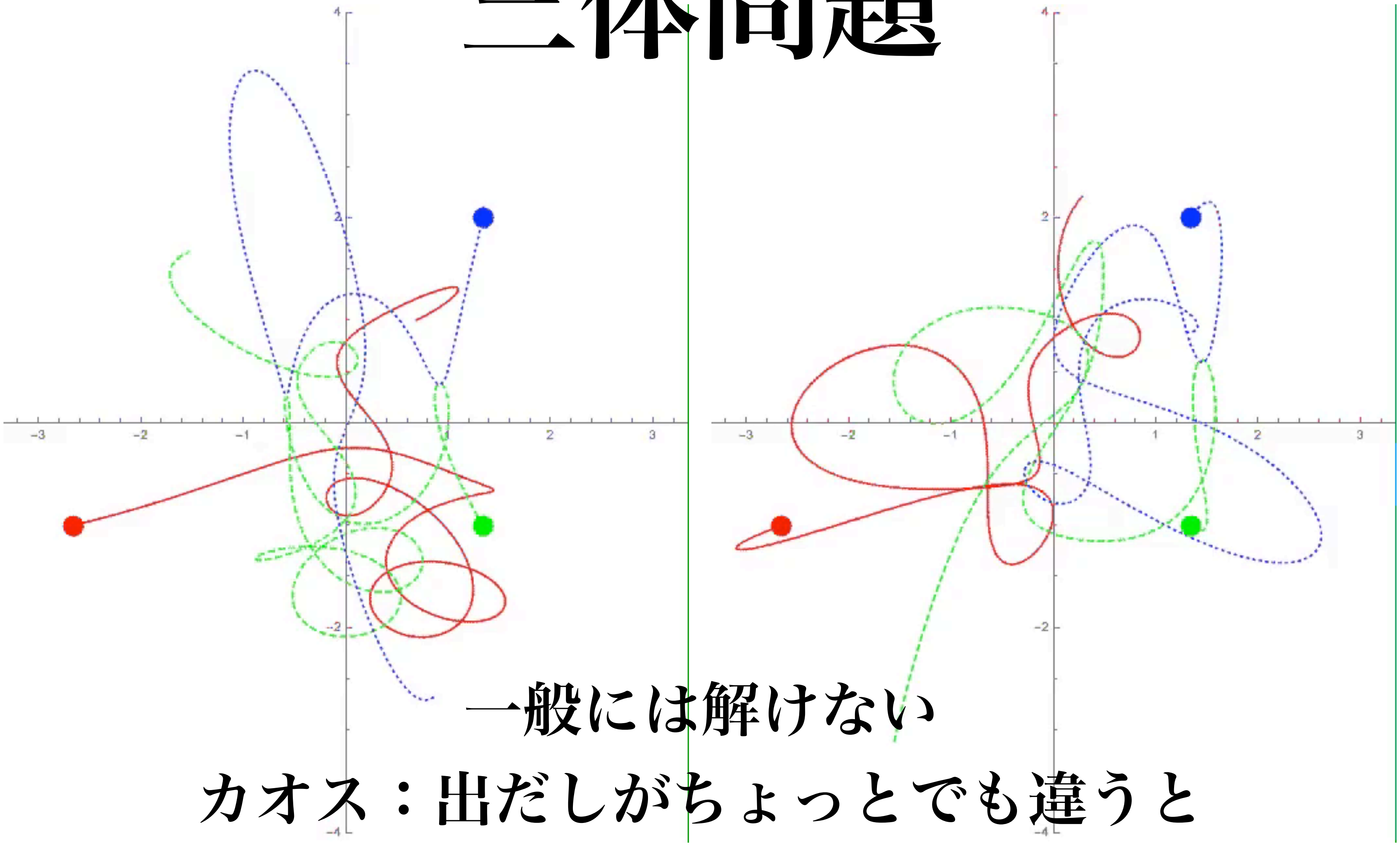


Eulerの直線解, 1760年　Lagrangeの正三角形解

距離の比は一定　1771年

この場合は解ける

三体問題

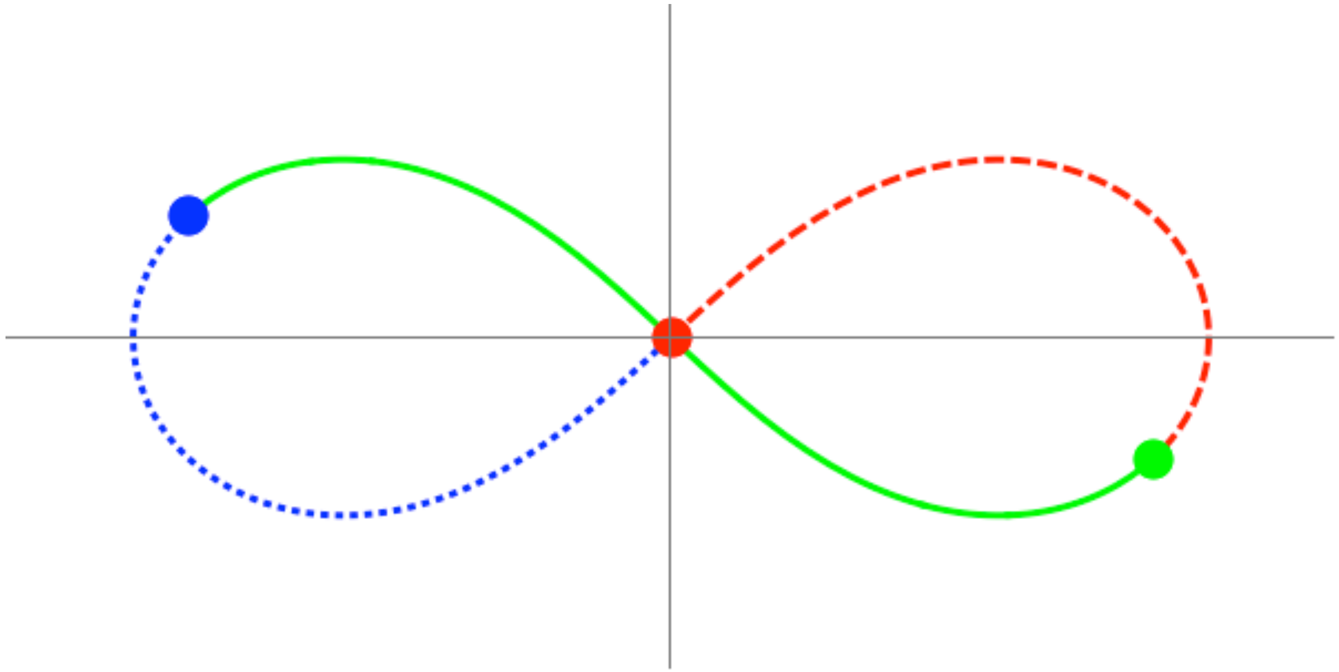


一般には解けない

カオス：出だしがちょっとでも違うと

後の振る舞いが大きく違ってくる

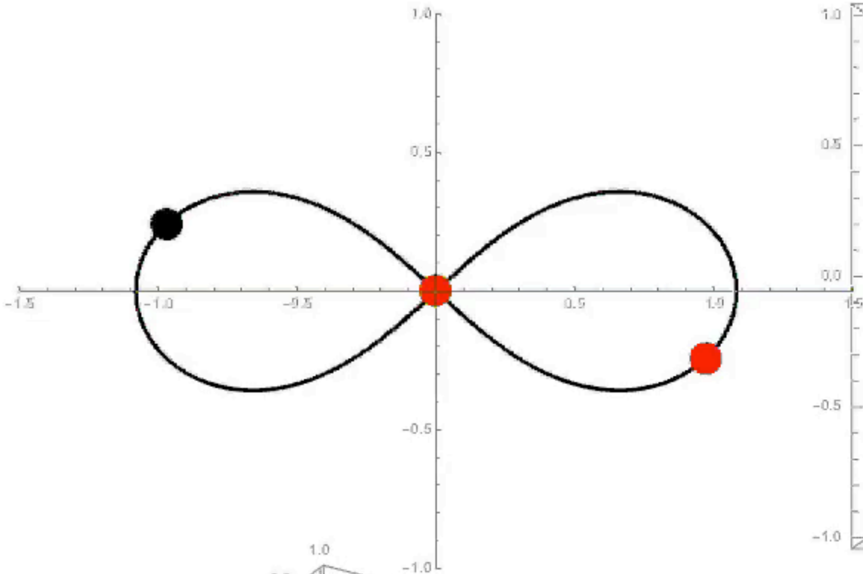
三体8の字解

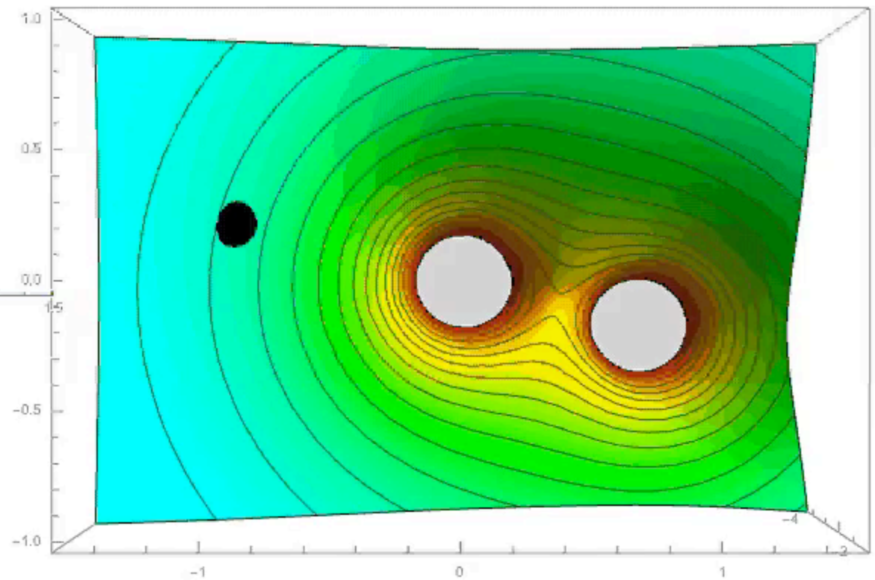


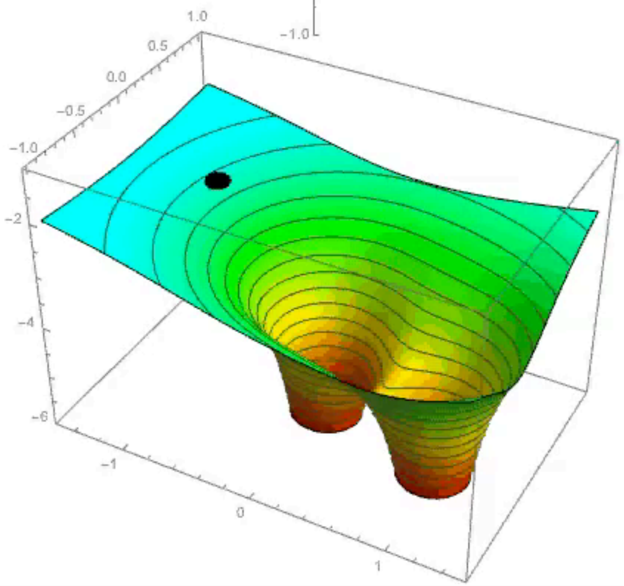
Chenciner & Montgomery, 2000

Euler, Lagrange から230年

三体8の字解

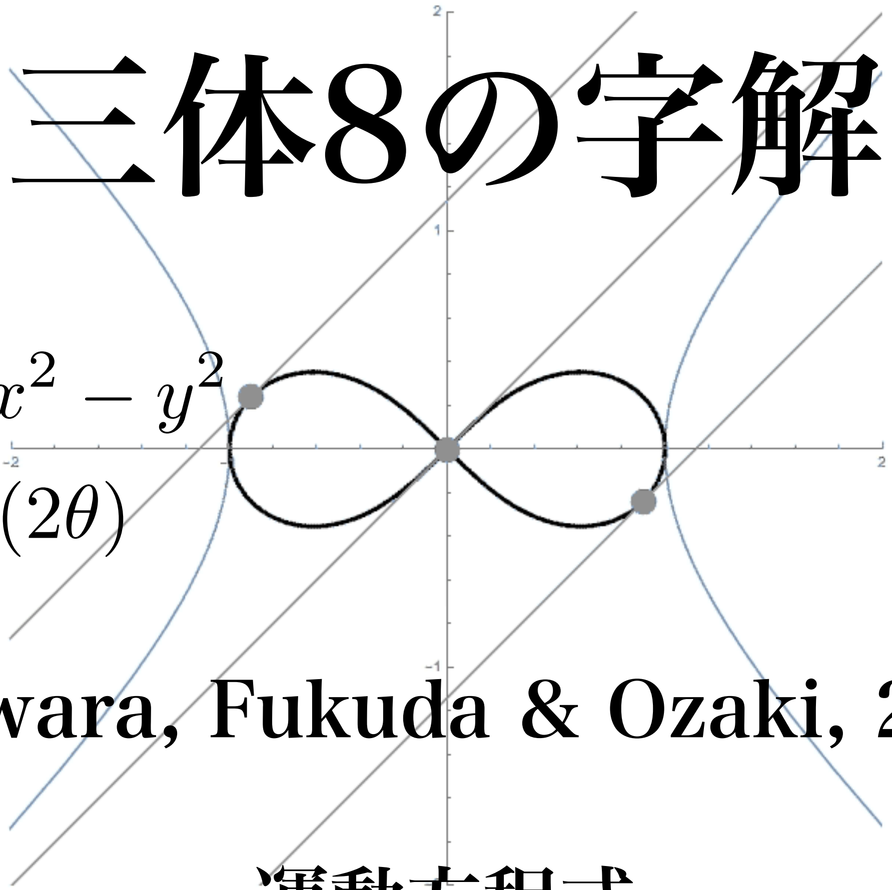






このモデルは正確ではないが，定性的な理解には良い

レムニスケート上の三体8の字解



$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

または $r^2 = \cos(2\theta)$

Fujiwara, Fukuda & Ozaki, 2003

運動方程式

$$U \sim \log r - r^2$$

3体8の字解

複素時間平面での振る舞いを調べる

レムニスケート上の3体8の字解：解けている

$f \sim \frac{1}{r^{\beta}}$ の下での8の字解:解けていない

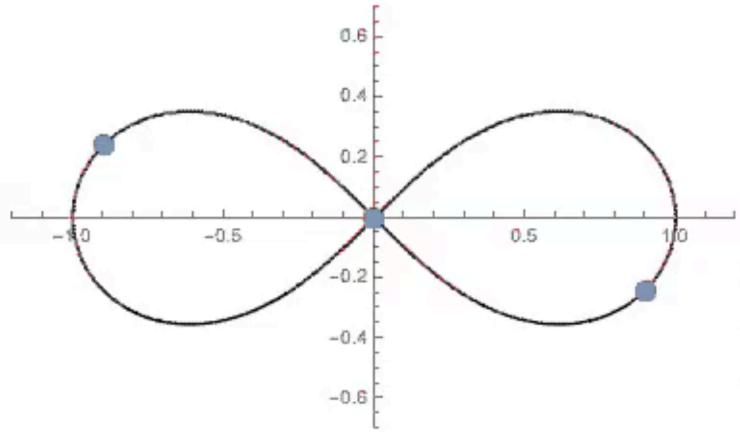
$$f \sim \frac{1}{r}$$

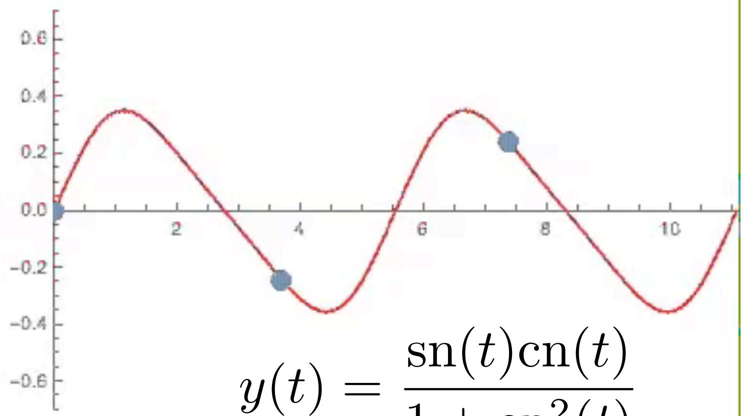
$f \sim \frac{1}{r^2}$:Newton（この世界）

$f \sim \frac{1}{r^3}$:強い力

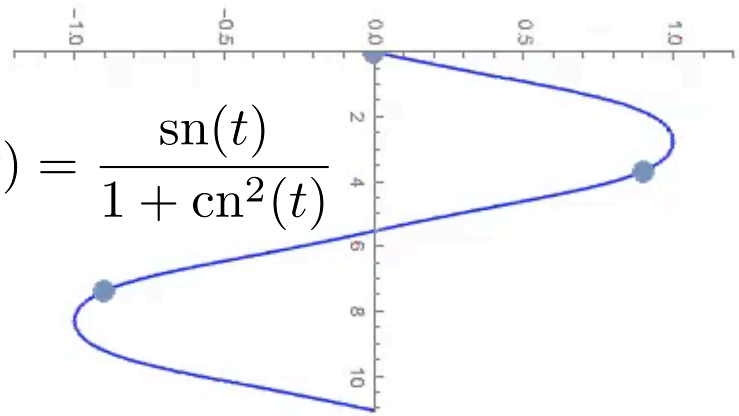
複素時間平面上の
レムニスケート解

レムニスケート（上の三体8の字）解





$$y(t) = \frac{\mathrm{sn}(t)\mathrm{cn}(t)}{1+\mathrm{cn}^2(t)}$$



$$x(t) = \frac{\mathrm{sn}(t)}{1+\mathrm{cn}^2(t)}$$

→

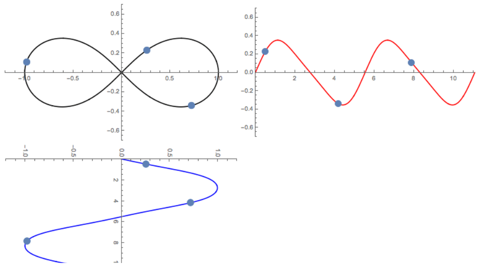
$$q(z) = x(z) + iy(z)$$

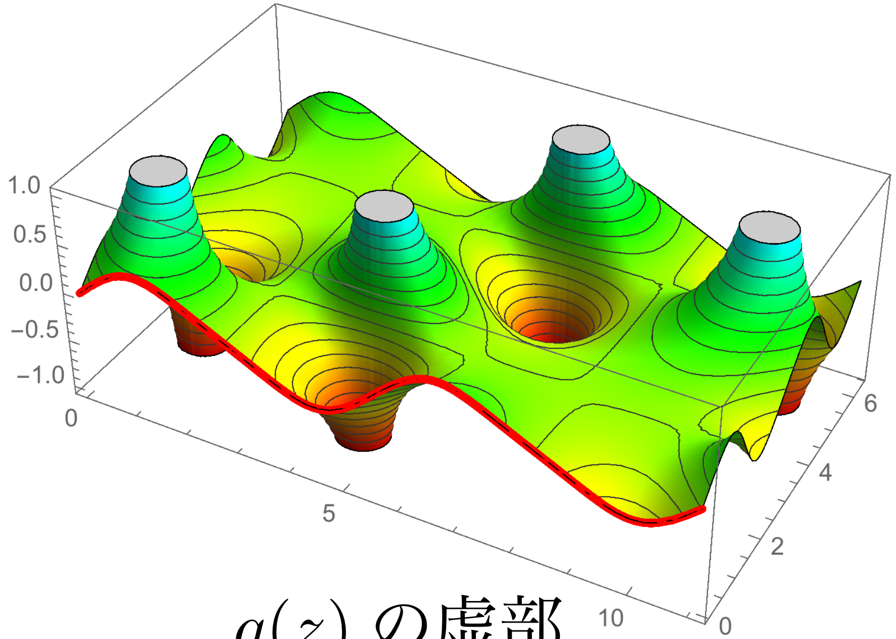
$$z = t + i\tau$$

複素時間平面上の関数

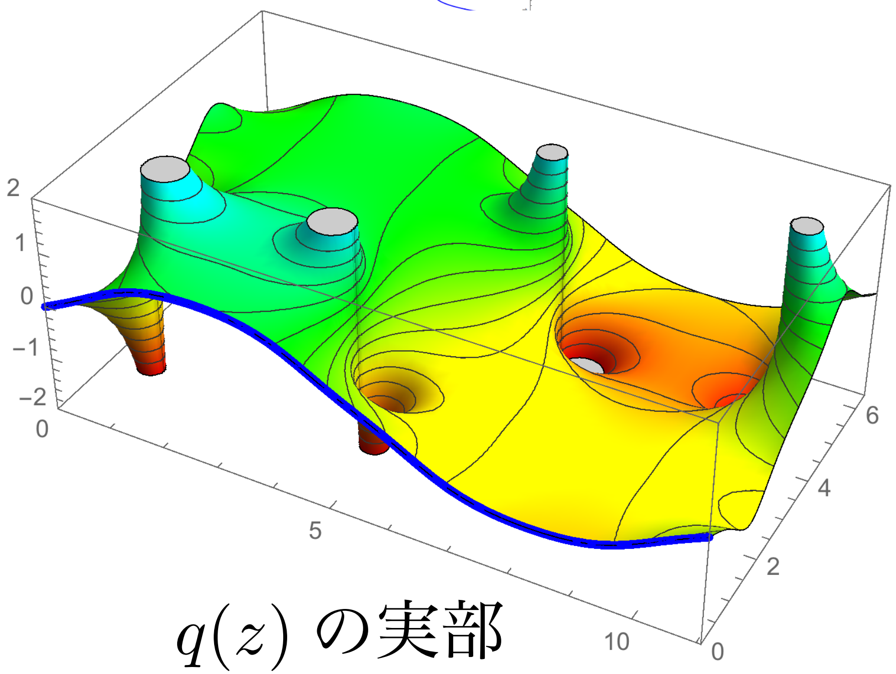
$$i^2 = -1$$

複素時間平面上のレムニスケート解





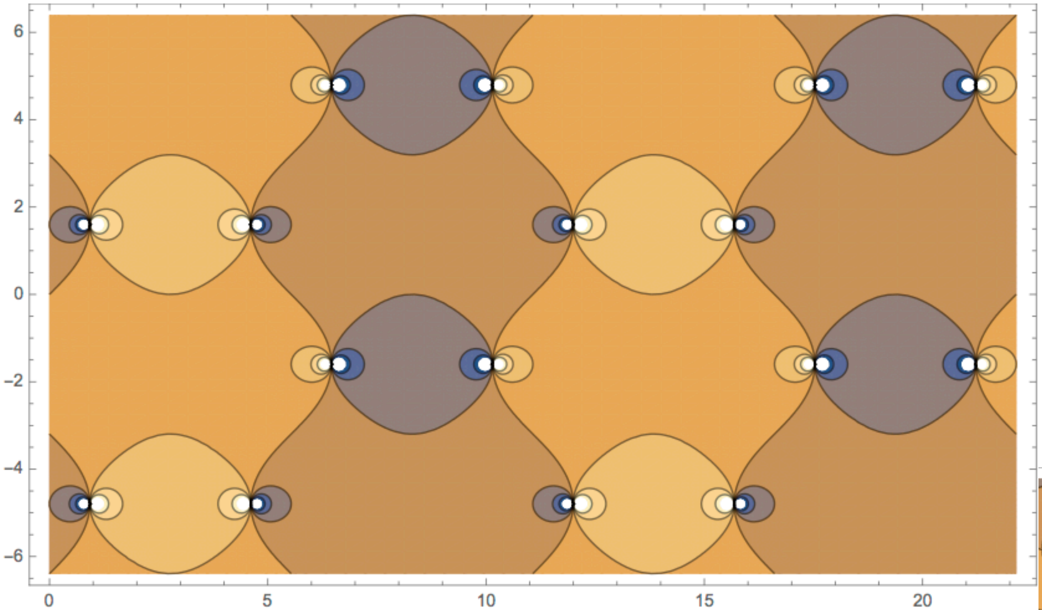
$q(z)$ の虚部

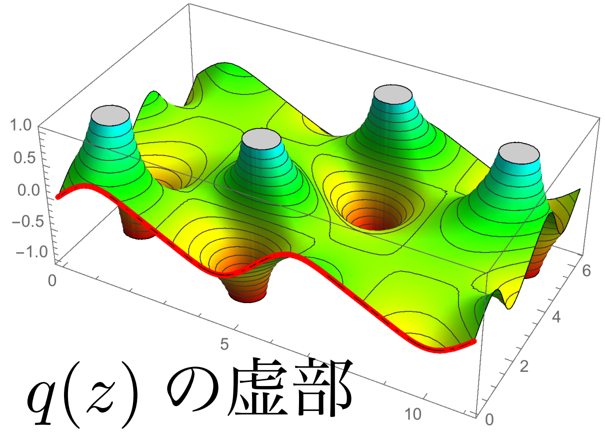


$q(z)$ の実部

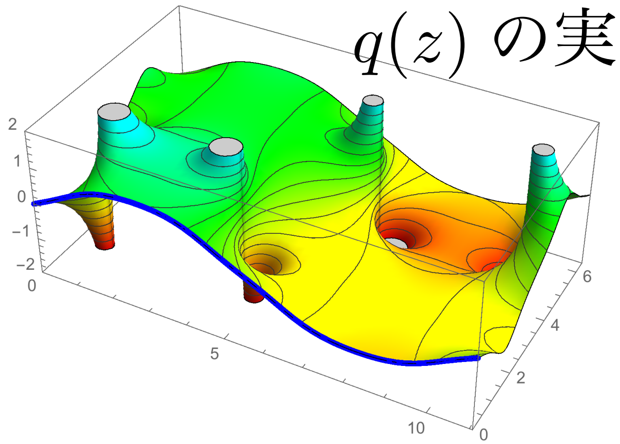
$$q(z) = x(z) + iy(z)$$

レムニスケート解
粒子の位置

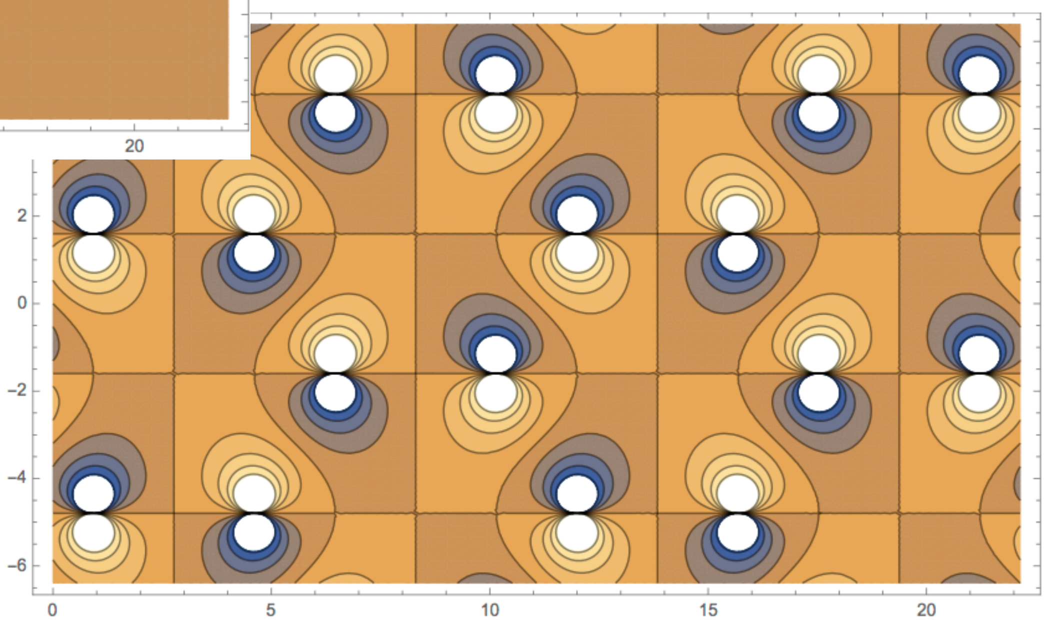




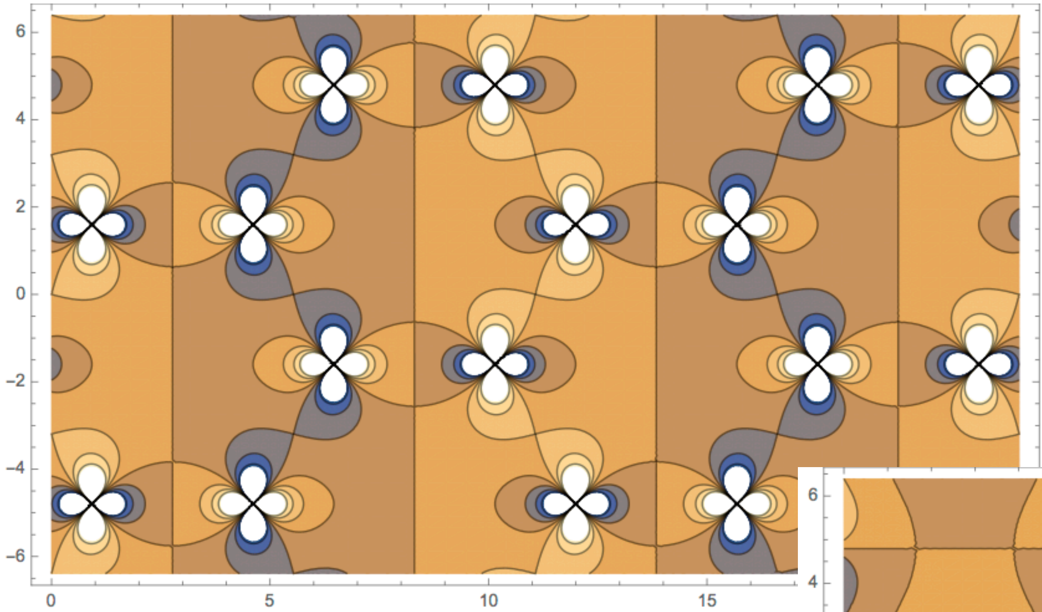
$q(z)$ の虚部

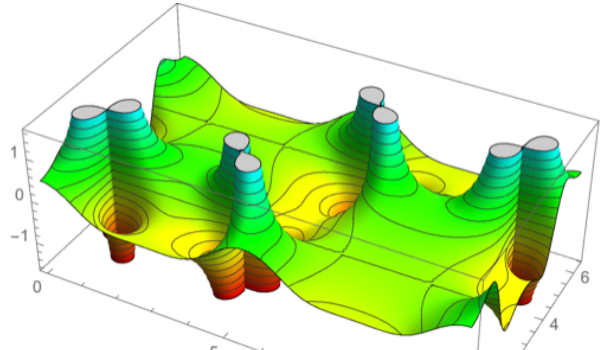


$q(z)$ の実部

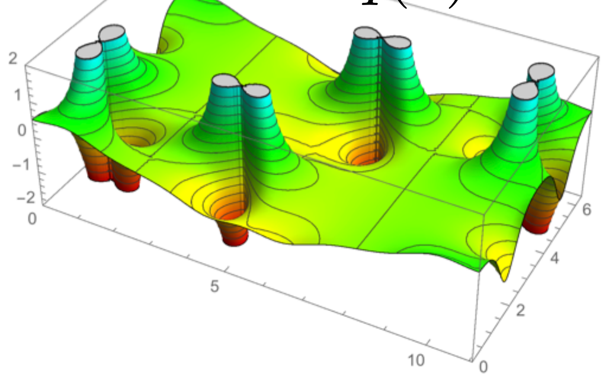


レムニスケート解
粒子の速度

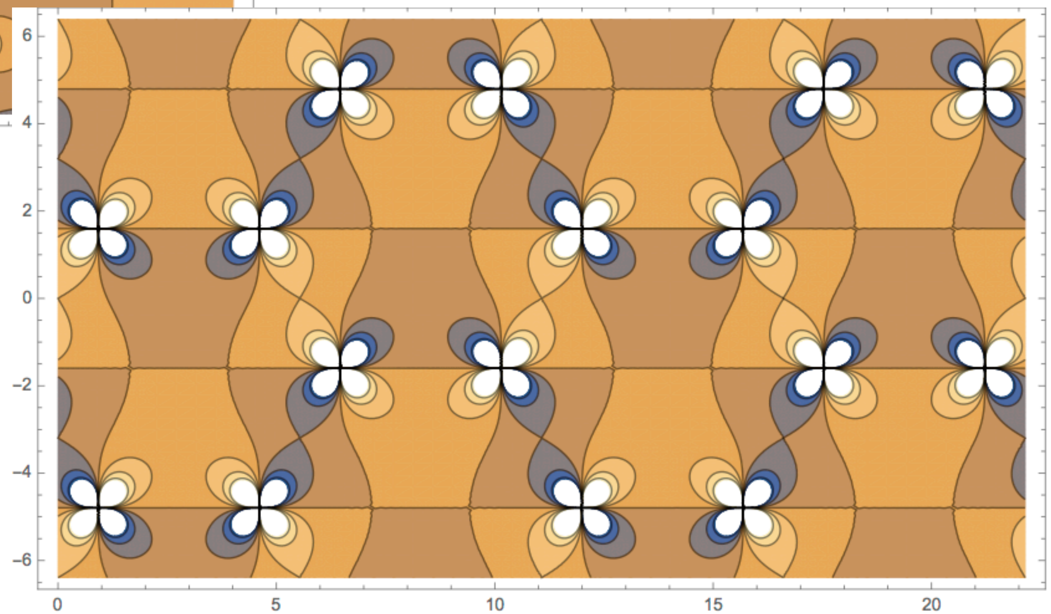




$\dot{q}(z)$ の虚部

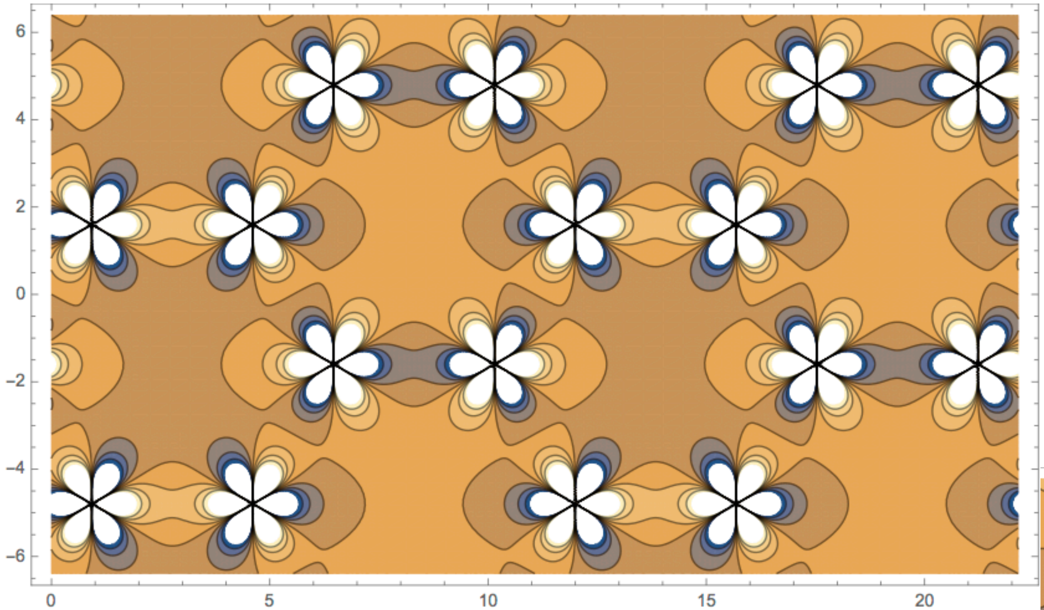


$\dot{q}(z)$ の実部

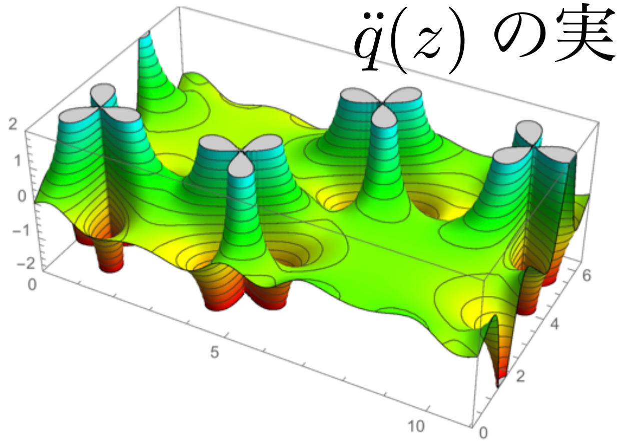


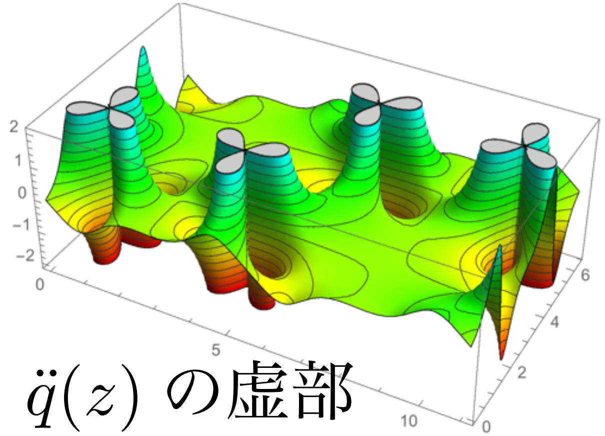
レムニスケート解

粒子の加速度

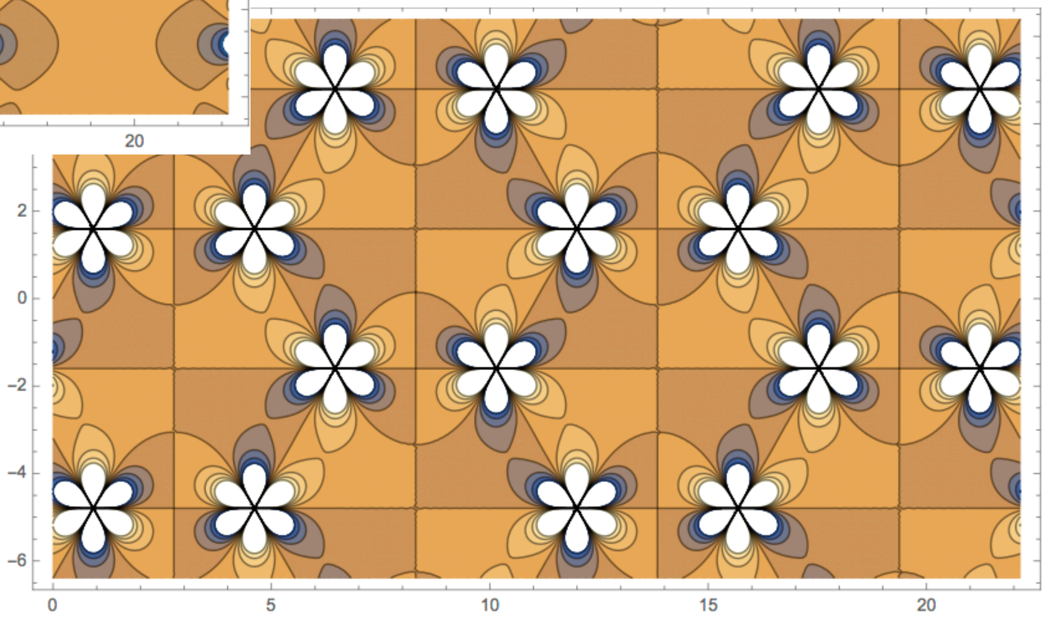


$\ddot{q}(z)$ の実部





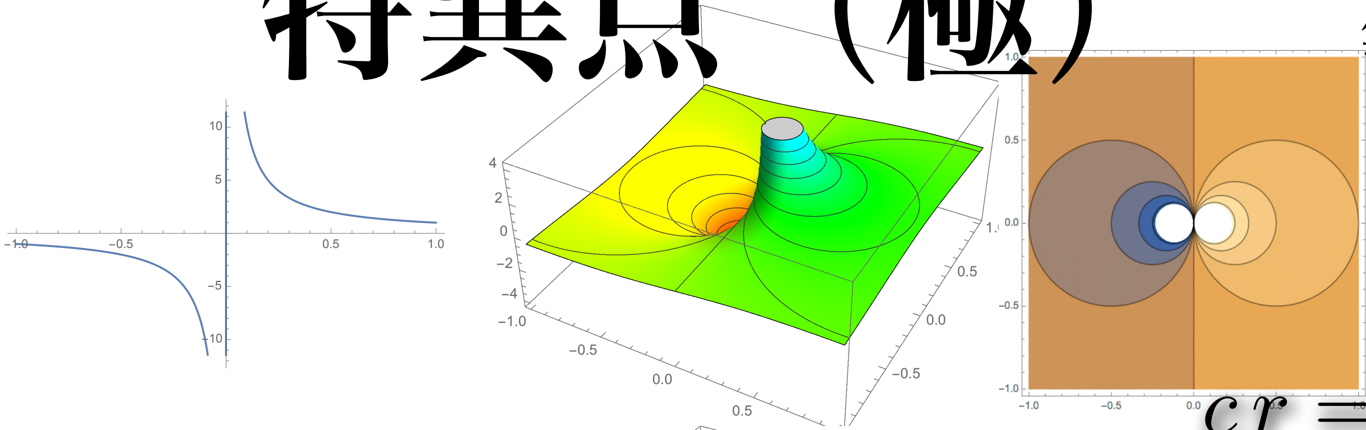
$\ddot{q}(z)$ の虚部



特異点（極）

等高線の形

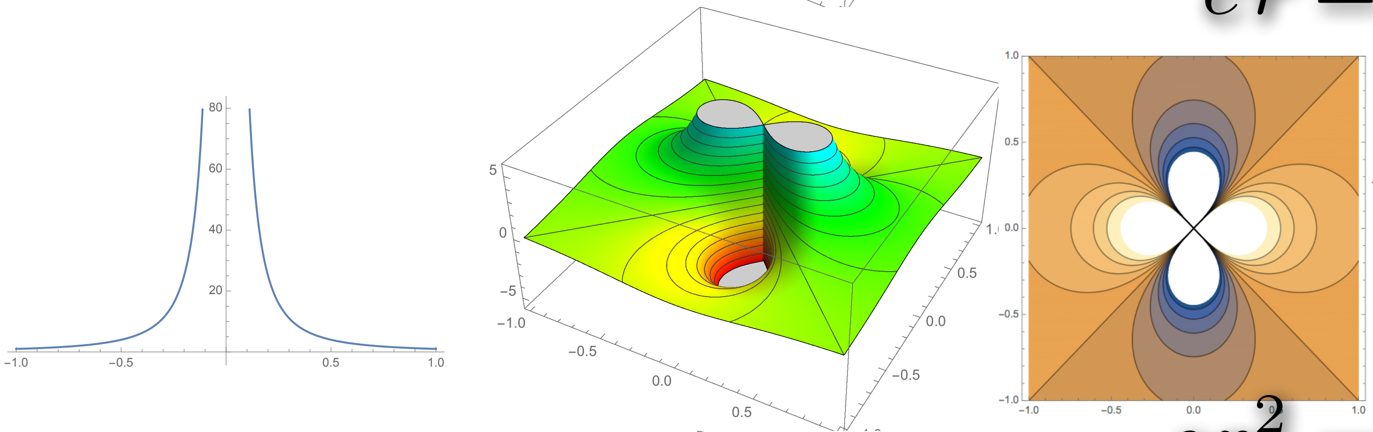
$$\frac{1}{z}$$



円

$$c\,r = \cos(\theta)$$

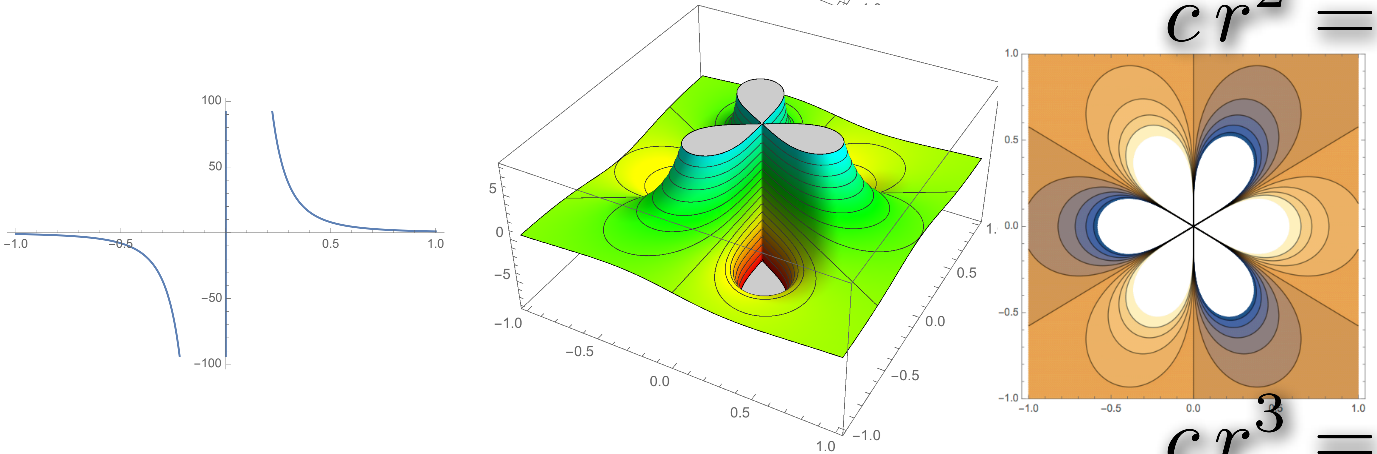
$$\frac{1}{z^2}$$



レムニスケート

$$c\,r^2 = \cos(2\theta)$$

$$\frac{1}{z^3}$$



無名

$$c\,r^3 = \cos(3\theta)$$

理由

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \frac{1}{z^n} = \frac{e^{-in\theta}}{r^n}$$

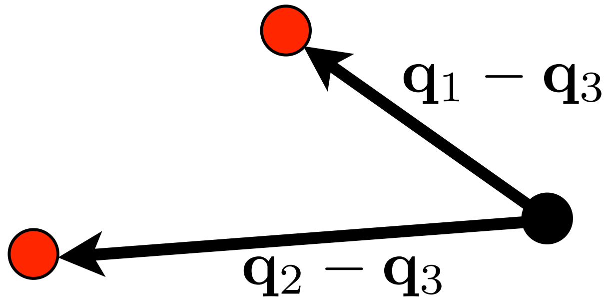
→

$$\Re\left(\frac{1}{z^n}\right) = c \Leftrightarrow \frac{\cos(n\theta)}{r^n} = c$$

$$\Im\left(\frac{1}{z^n}\right) = c \Leftrightarrow \frac{-\sin(n\theta)}{r^n} = c$$

運動方程式

$$\frac{d^2\mathbf{q}_3}{dt^2} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) + \mathbf{f}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3)$$



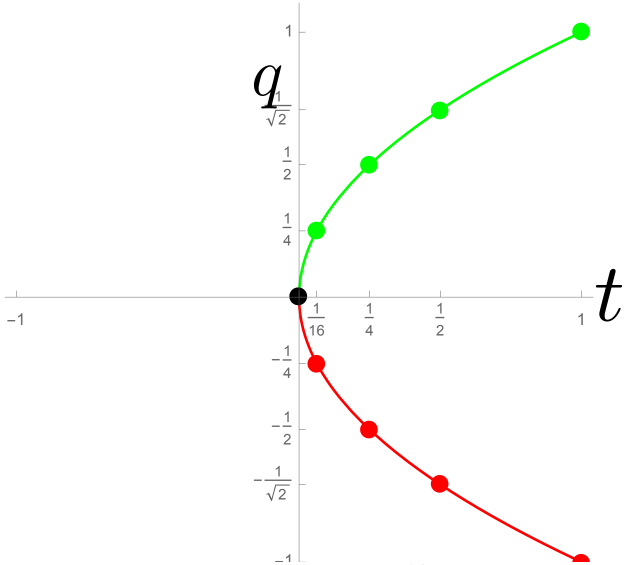
$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3}{(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3)^2} - \frac{\sqrt{3}}{12}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3)$$

↑

引力ではなく斥力

Fujiwara, Fukuda & Ozaki, 2003

特異点（分岐点）



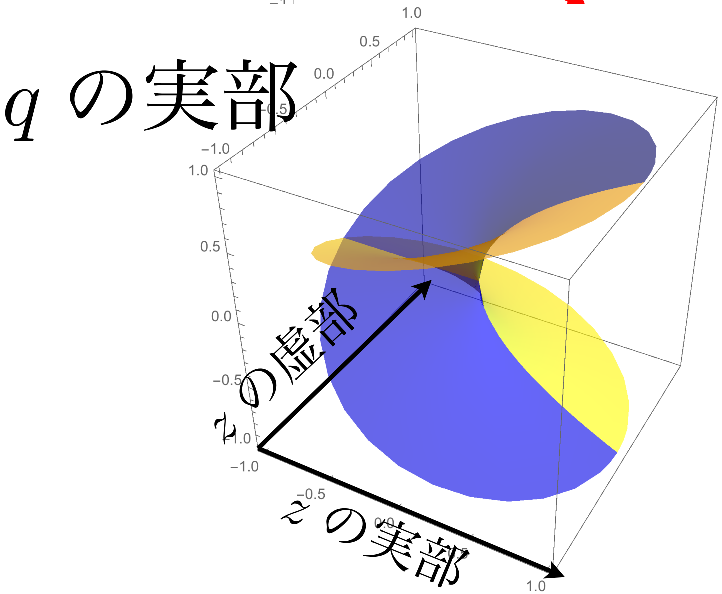
平方根

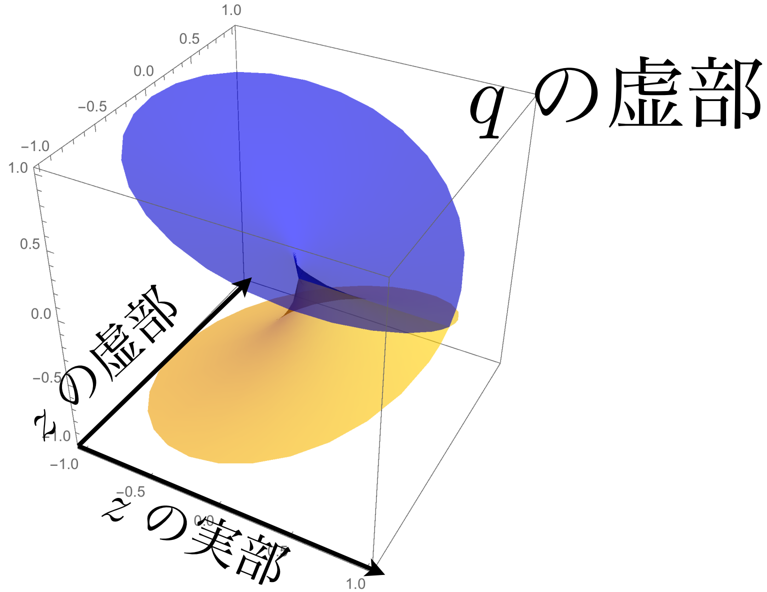
$q = z^{1/2} \Leftarrow q^2 = z$ の解

一周すると符合が逆に,

2周すると戻る

⇒Riemann面



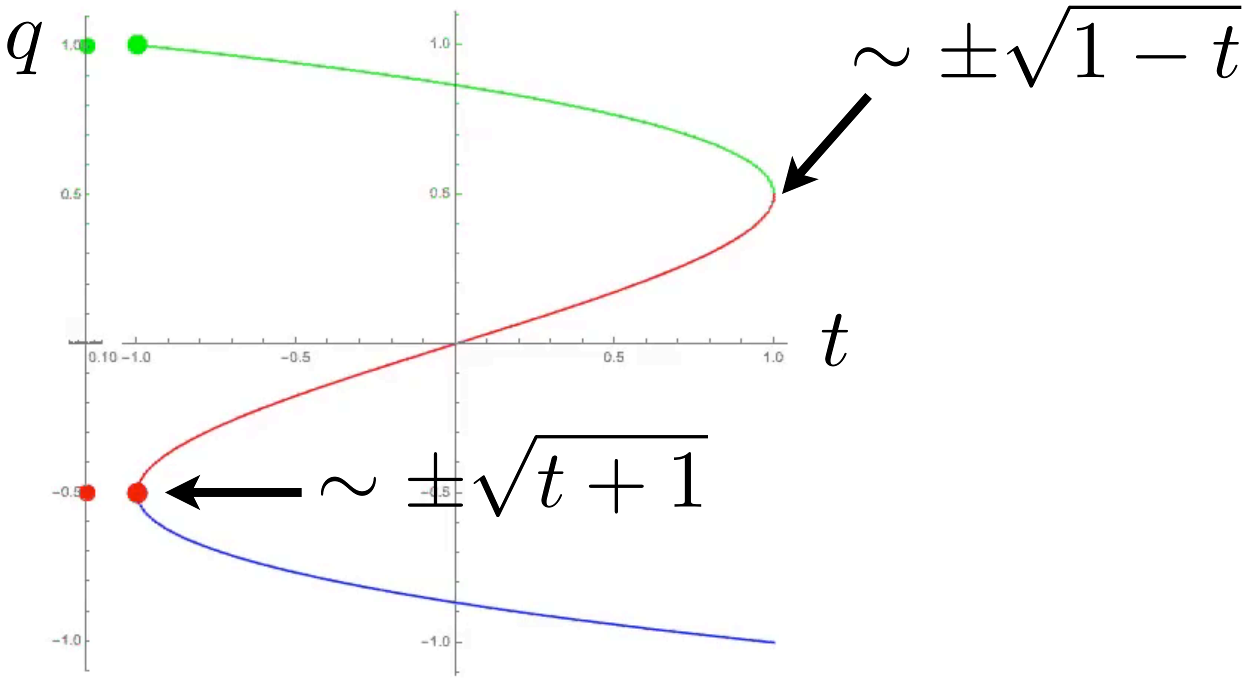


等質量で直線上のみ

$$U = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(q_1 - q_2)^2} + \frac{1}{(q_2 - q_3)^2} + \frac{1}{(q_3 - q_1)^2}\right)$$

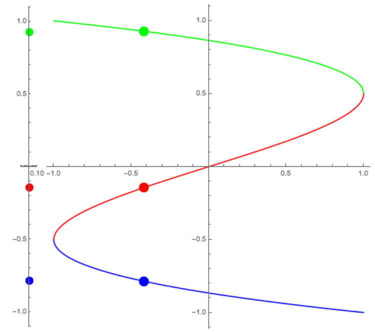
一直線

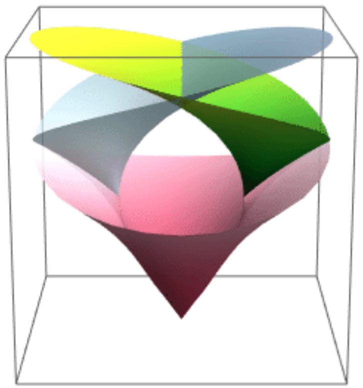
$$力 \sim \frac{1}{距離^3}$$



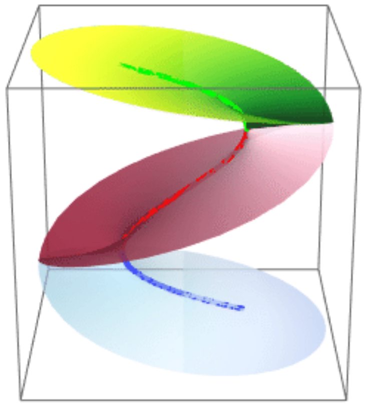
平方根の分岐点を持つ

等質量で直線上のみ

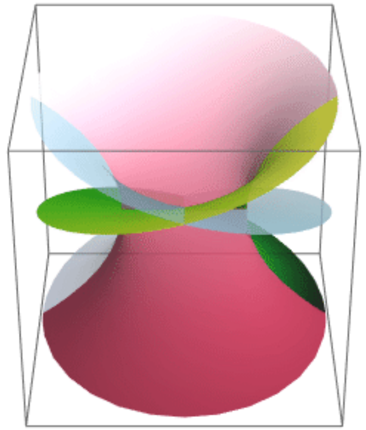




絶対値



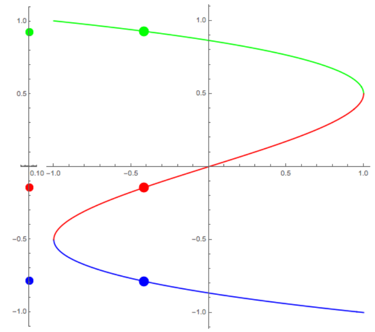
実部

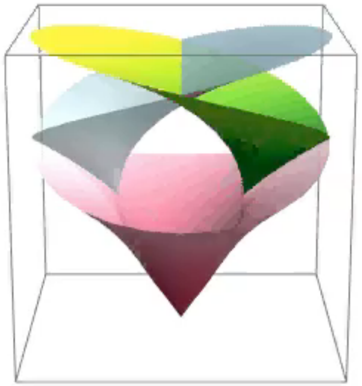


虚部

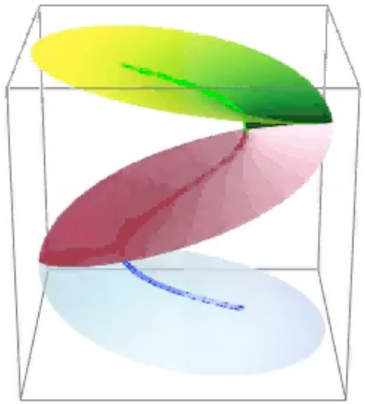
Riemann面

等質量で直線上のみ

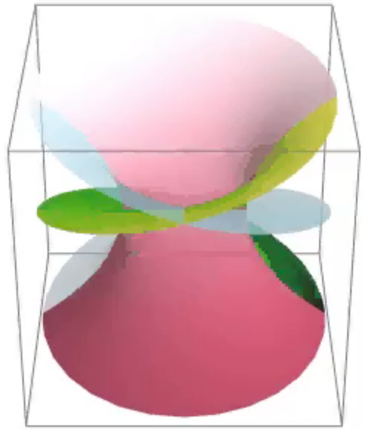




絶対値



実部



虚部

Riemann面

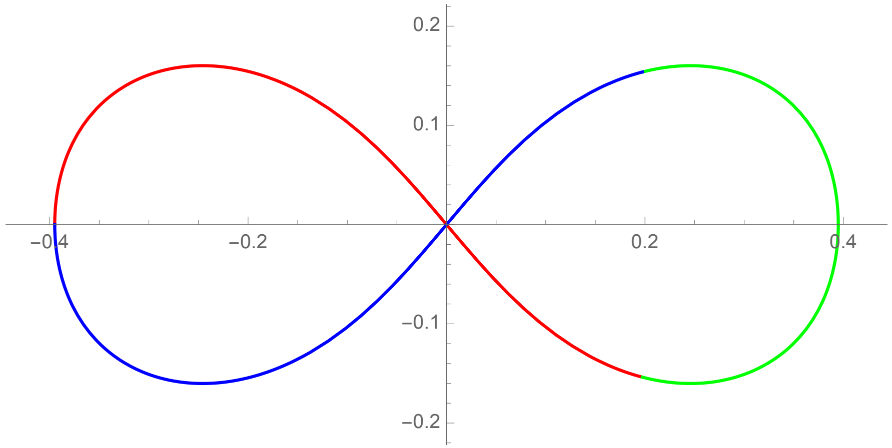
複素平面上の三体8の字解

強い力のポテンシャル

$$U \sim -\frac{1}{2r^2}$$

解けていない．
解けないかもしれない

強い力の下での三体8の字解



$$U \sim -\frac{1}{2r^2}$$

$$\text{力} \sim \frac{1}{\text{距離}^3}$$

数値計算

初期値の精度：38桁程度

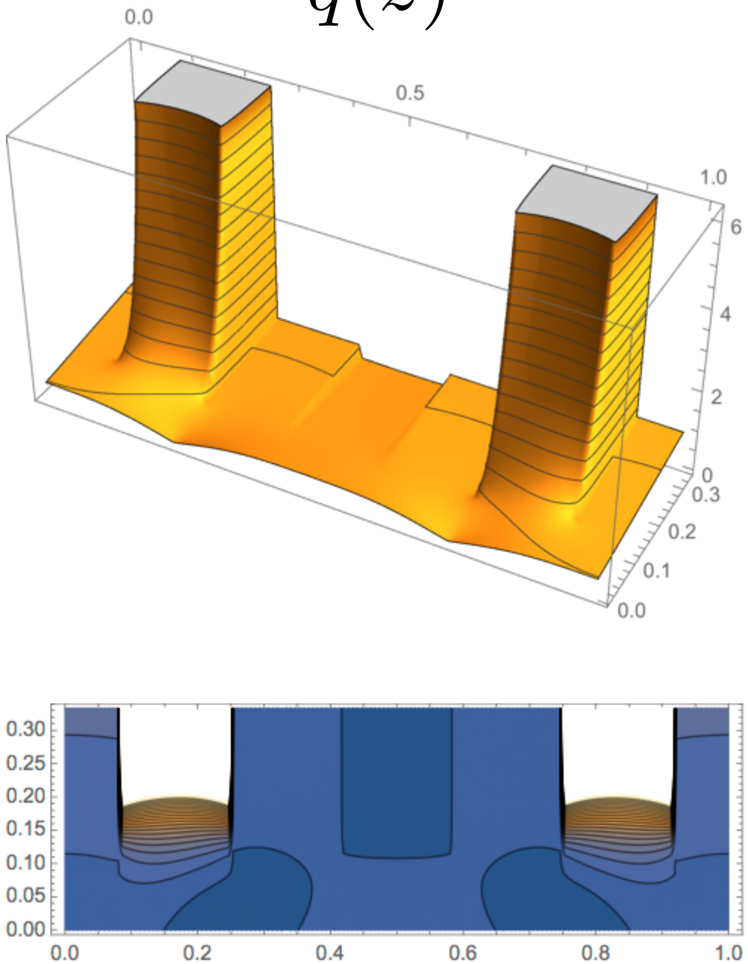
$$|q_k(T/3) - q_{k+1}| \leq 10^{-38}$$

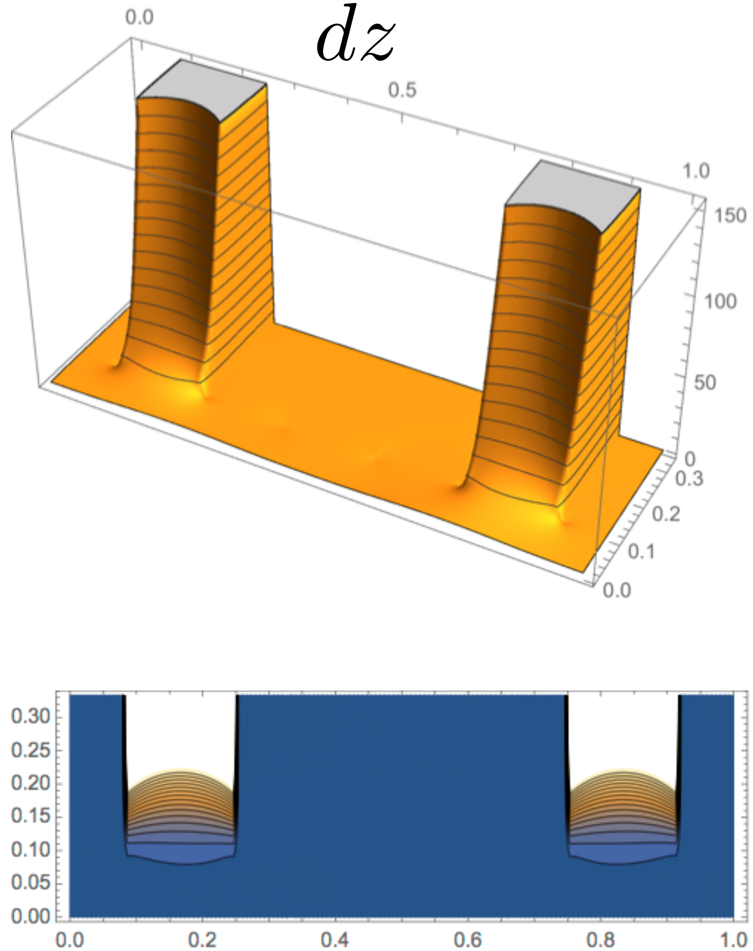
計算の精度：50桁程度（90桁も）

通常は16桁程度

8の字解の絶対値

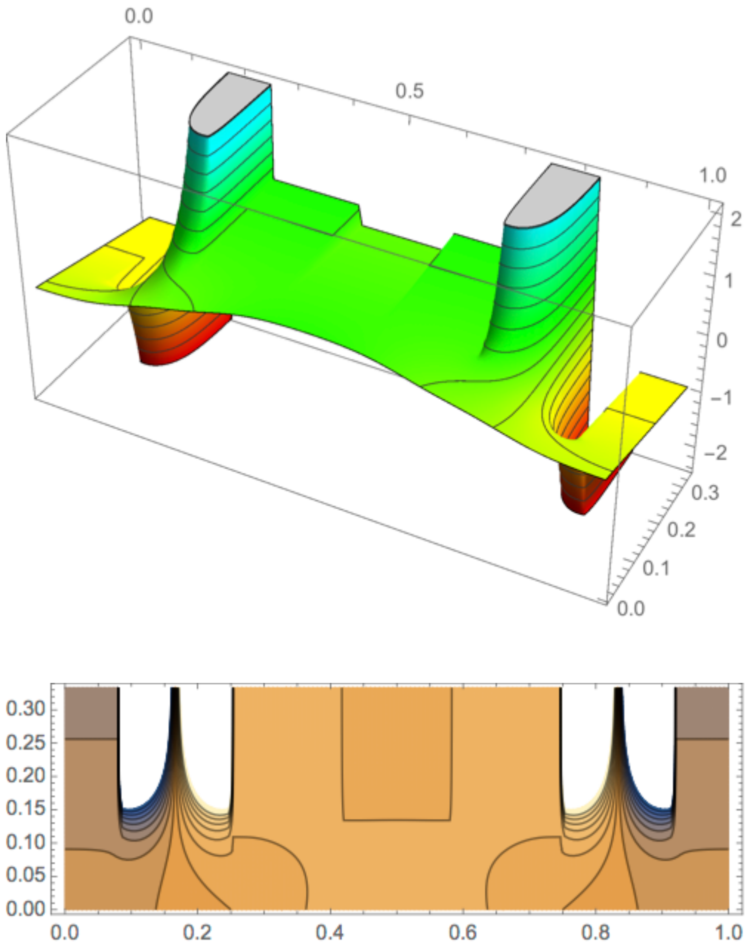
$q(z)$ $\qquad$ $\dfrac{dq(z)}{dz}$



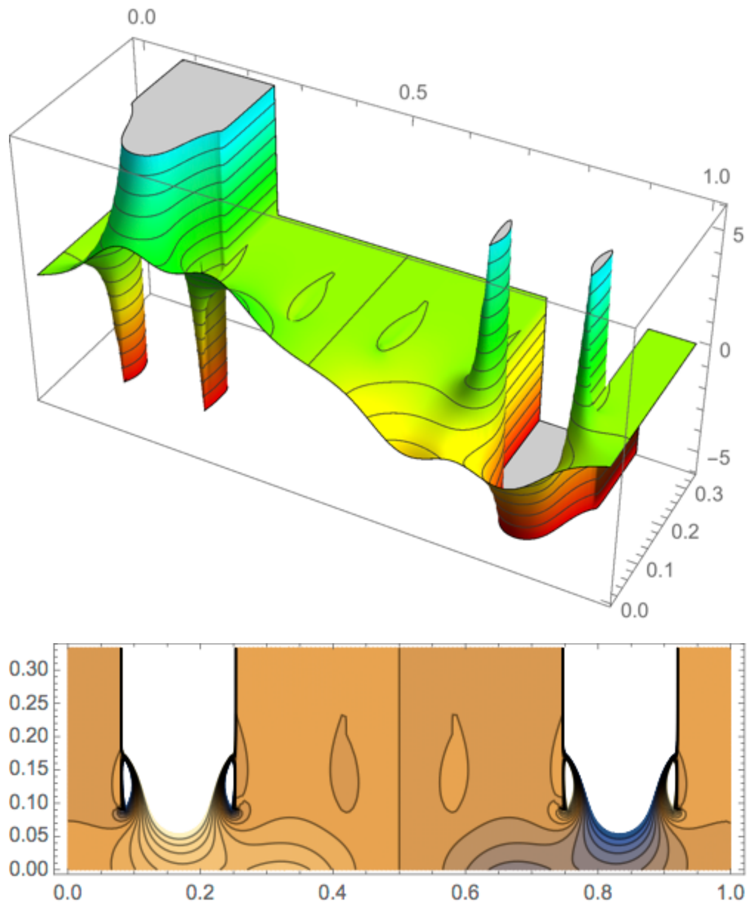


8の字解の実部

$q(z)$

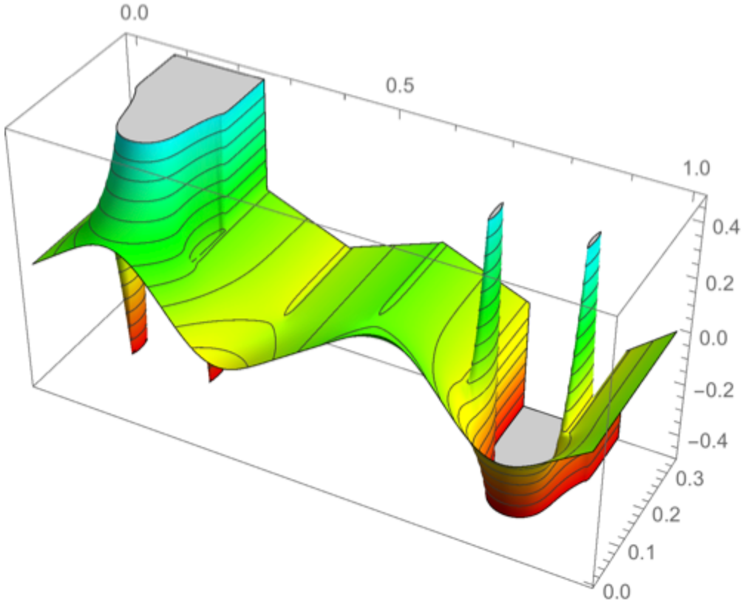


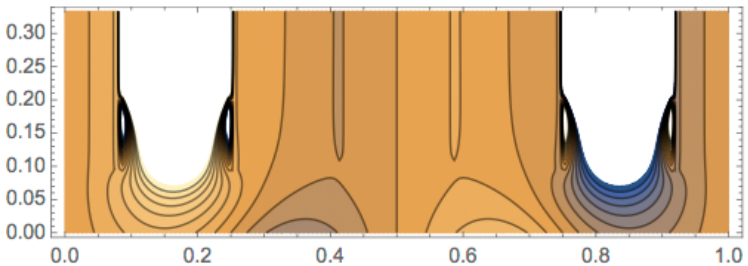
$$\frac{dq(z)}{dz}$$



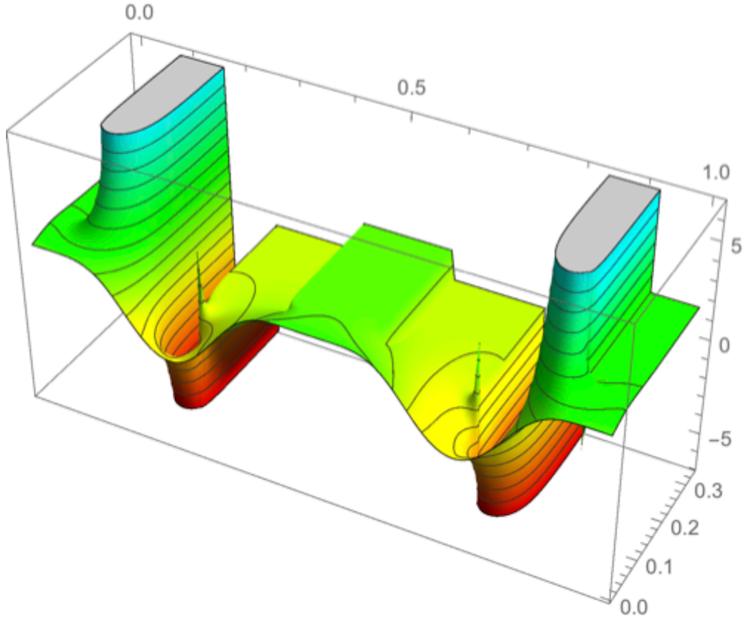
8の字解の虚部

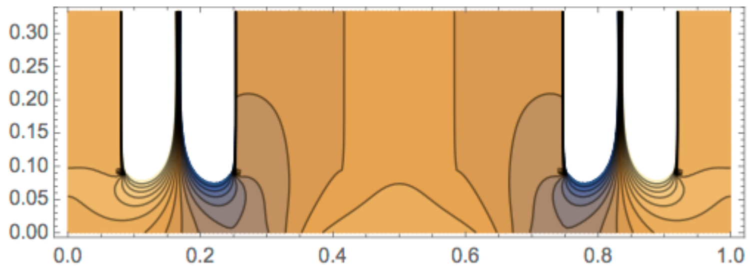
$$q(z)$$





$$\frac{dq(z)}{dz}$$



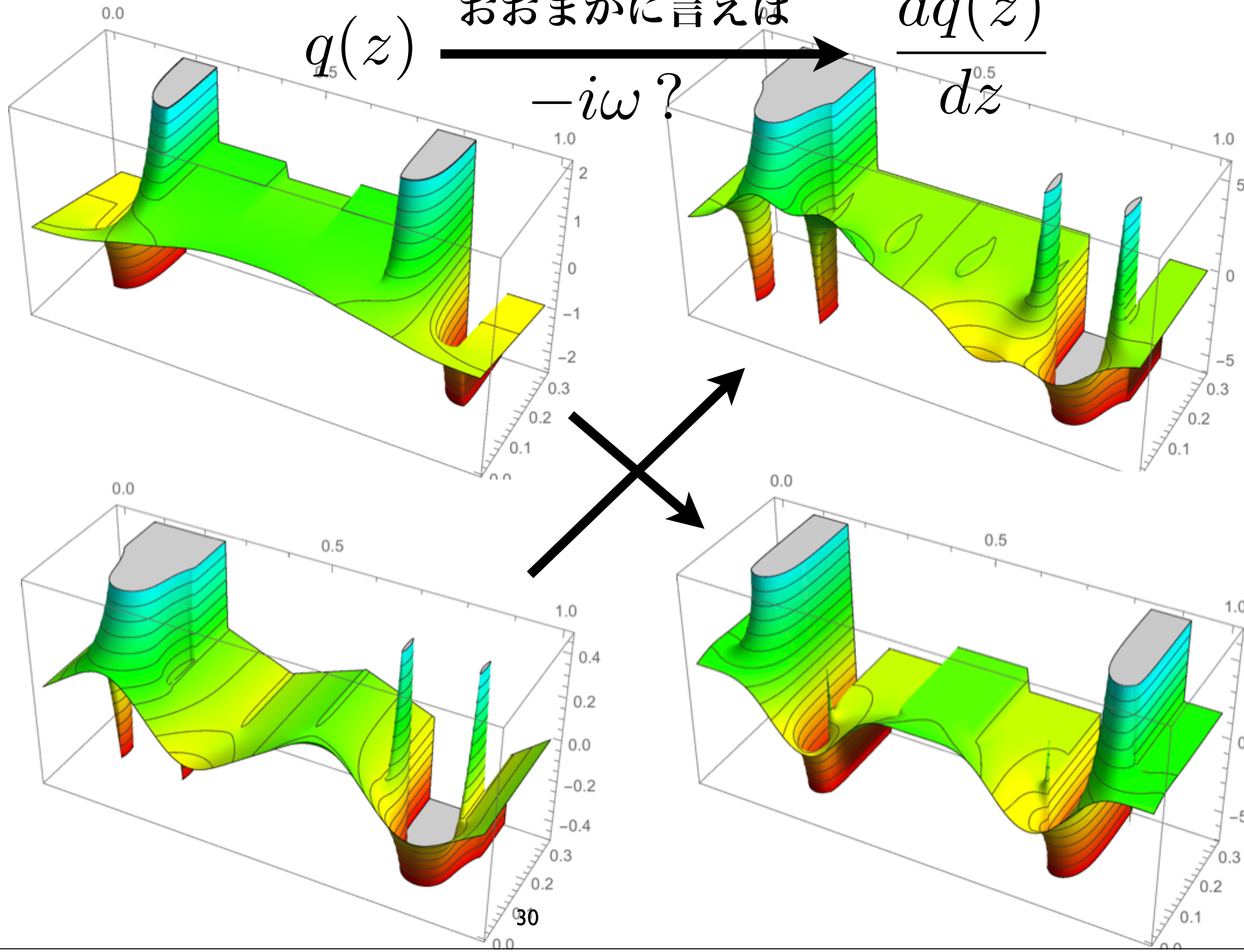


8の字解の実部と虚部

$$q(z) \xrightarrow[-i\omega\,?]{\text{おおまかに言えば}} \frac{dq(z)}{dz}$$

実部

虚部



おおまかには

$$q = a + ib,\ \frac{dq}{dz} = c + id$$

が

$$c \sim b,\ d \sim -a$$

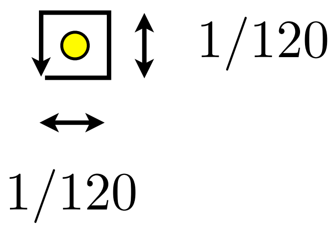
となっているということは,

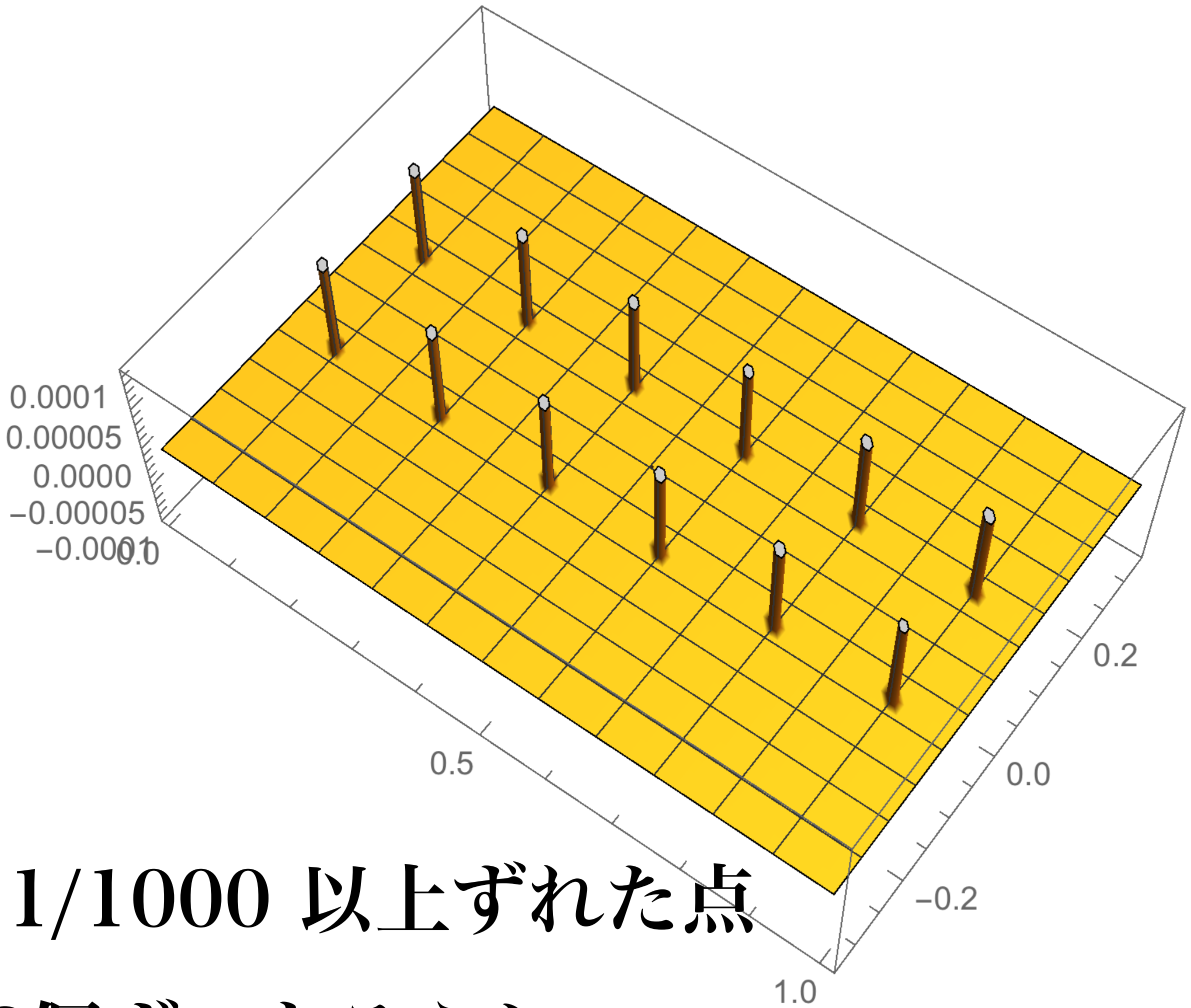
$$c + id \sim -i\omega(a + ib) = \omega(b - ia)$$

つまり $\displaystyle \frac{dq}{dz} \sim -i\omega\, q$

という関係を示唆する

8の字解の分岐点の位置





一周して値が 1/1000 以上ずれた点

実軸の両側に6個ずつあるらしい

現時点のまとめ

- 強い力の下での三体8の字解の複素時間平面上の振る舞いを調べ始めた
- 極はないらしい
- 分岐点が実軸の両側に6個ずつあるようだ
- 分岐点の様子は未だ不明
- 分岐点を内部に含む経路で，元に戻る経路は見つかっていない
- 内部に分岐点を含まない経路で戻ると元に戻れる（計算精度が確認できる）