

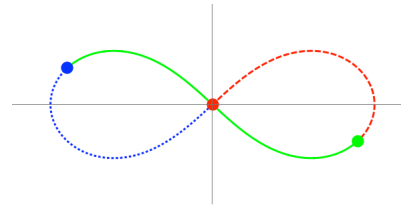
複素時間平面上の 三体8の字解

藤原俊朗

2016年1月18日
北里大学一般教育部

1

三体8の字解

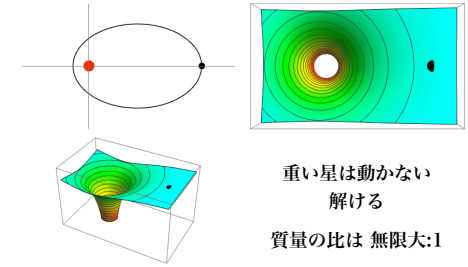


Chenciner & Montgomery, 2000

2001/06/13 夕刊

2

一体問題



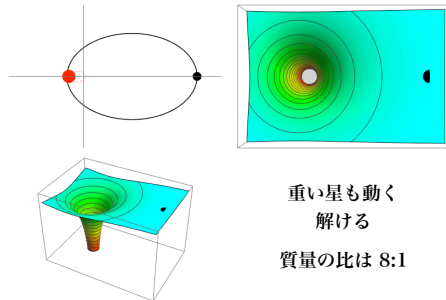
重い星は動かない
解ける

質量の比は 無限大:1

このモデルは正確ではないが、定性的な理解には良い

3

二体問題



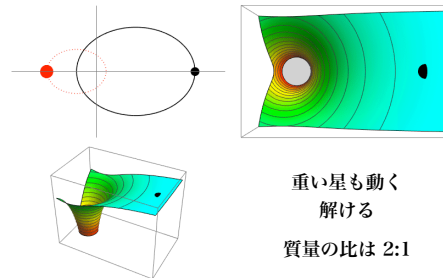
重い星も動く
解ける

質量の比は 8:1

このモデルは正確ではないが、定性的な理解には良い

4

二体問題



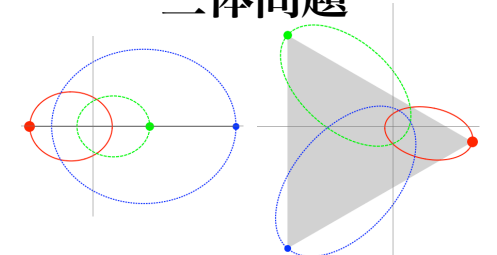
重い星も動く
解ける

質量の比は 2:1

このモデルは正確ではないが、定性的な理解には良い

5

三体問題



Eulerの直線解, 1760年

距離の比は一定

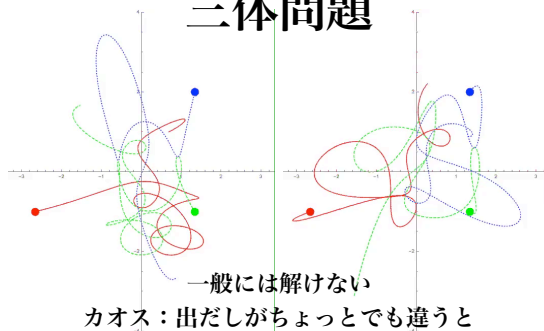
Lagrangeの正三角形解

1771年

この場合は解ける

6

三体問題

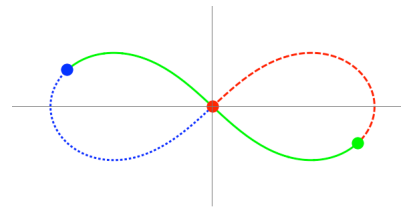


一般には解けない

カオス：出だしがちょっとでも違うと
後の振る舞いが大きく違ってくる

7

三体8の字解

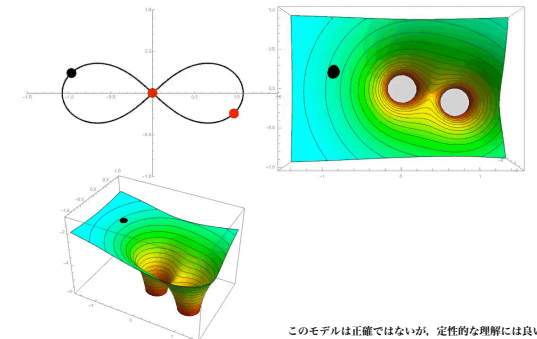


Chenciner & Montgomery, 2000

Euler, Lagrange から230年

8

三体8の字解



このモデルは正確ではないが、定性的な理解には良い

9

レムニスケート上の 三体8の字解

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

または $r^2 = \cos(2\theta)$

Fujiwara, Fukuda & Ozaki, 2003

運動方程式
 $U \sim \log r - r^2$

10

3体8の字解

複素時間平面での振る舞いを調べる

レムニスケート上の3体8の字解：解けている

$f \sim \frac{1}{r^\beta}$ の下での8の字解:解けていない

$$f \sim \frac{1}{r}$$

$$f \sim \frac{1}{r^2} : \text{Newton (この世界)}$$

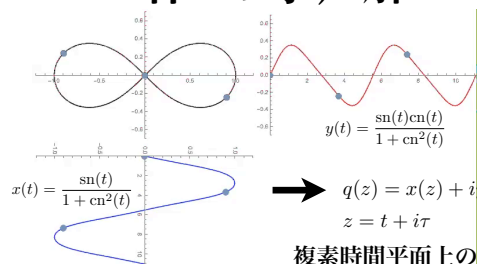
$$f \sim \frac{1}{r^3} : \text{強い力}$$

11

複素時間平面上の レムニスケート解

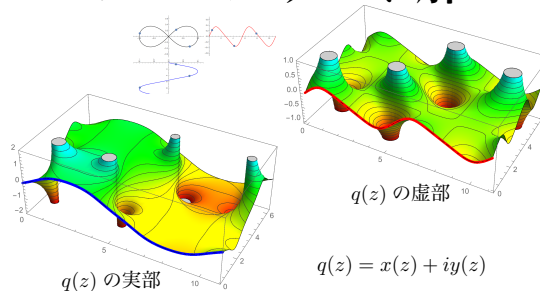
12

レムニスケート（上の 三体8の字）解



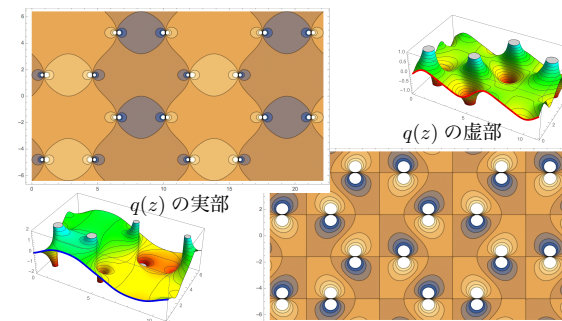
13

複素時間平面上の レムニスケート解



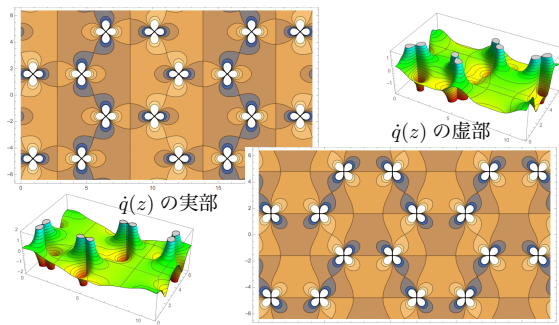
14

レムニスケート解 粒子の位置



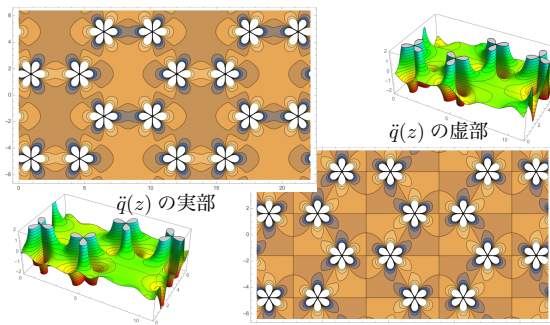
15

レムニスケート解 粒子の速度



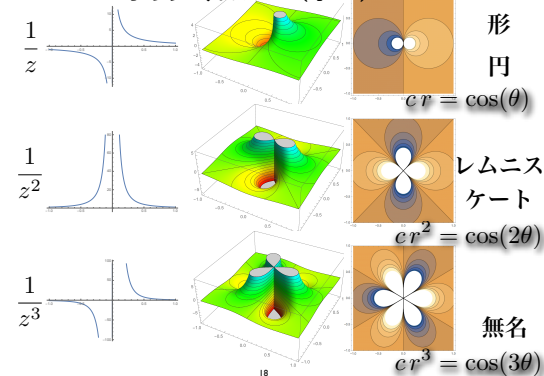
16

レムニスケート解 粒子の加速度



17

特異点（極）



18

理由

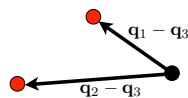
$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \frac{1}{z^n} = \frac{e^{-in\theta}}{r^n}$$

$$\begin{aligned} \Re\left(\frac{1}{z^n}\right) &= c \Leftrightarrow \frac{\cos(n\theta)}{r^n} = c \\ \Im\left(\frac{1}{z^n}\right) &= c \Leftrightarrow \frac{-\sin(n\theta)}{r^n} = c \end{aligned}$$

19

運動方程式

$$\frac{d^2 \mathbf{q}_3}{dt^2} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) + \mathbf{f}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3)$$



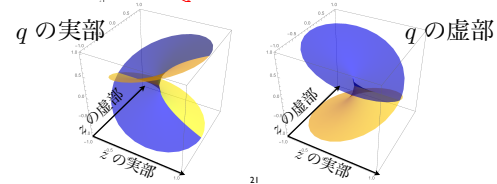
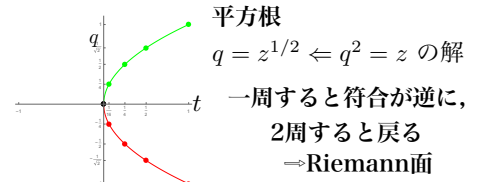
$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3}{(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3)^2} - \frac{\sqrt{3}}{12} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3)$$

引力ではなく斥力

Fujiwara, Fukuda & Ozaki, 2003

20

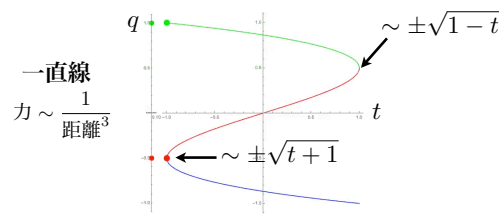
特異点 (分岐点)



21

等質量で直線上のみ

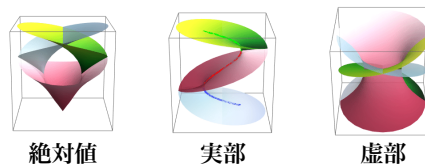
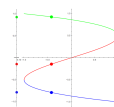
$$U = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(q_1 - q_2)^2} + \frac{1}{(q_2 - q_3)^2} + \frac{1}{(q_3 - q_1)^2} \right)$$



平方根の分岐点を持つ

22

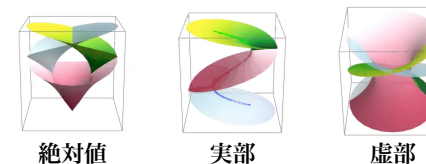
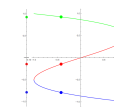
等質量で直線上のみ



Riemann面

23

等質量で直線上のみ



Riemann面

24

複素平面上の 三体8の字解

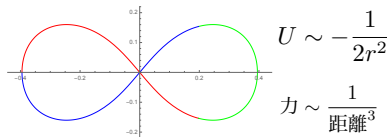
強い力のポテンシャル

$$U \sim -\frac{1}{2r^2}$$

解けていない。
 解けないかもしれない

25

強い力の下での 三体8の字解



数値計算

初期値の精度: 38桁程度

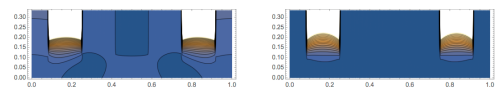
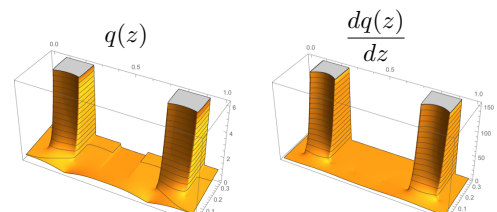
$$|q_k(T/3) - q_{k+1}| \leq 10^{-38}$$

計算の精度: 50桁程度 (90桁も)

通常は16桁程度

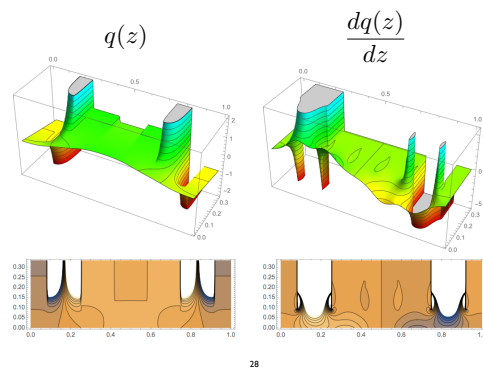
26

8の字解の絶対値



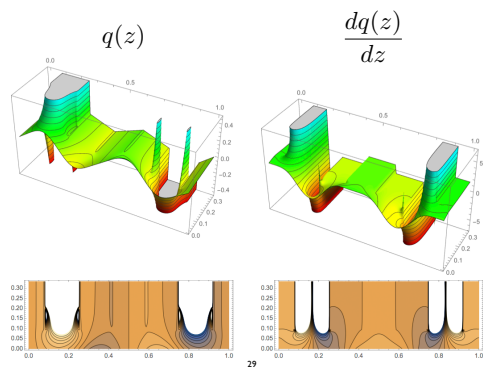
27

8の字解の実部



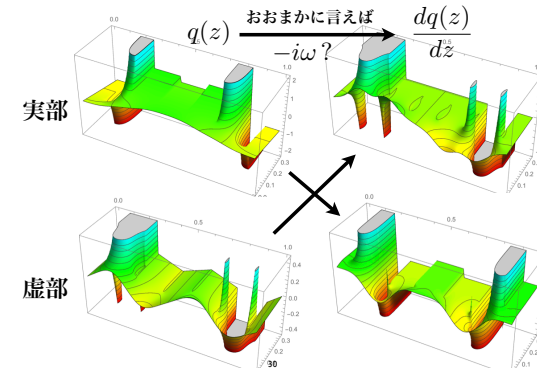
28

8の字解の虚部



29

8の字解の実部と虚部



おおまかには

$$q = a + ib, \frac{dq}{dz} = c + id$$

が

$$c \sim b, d \sim -a$$

となっているということは,

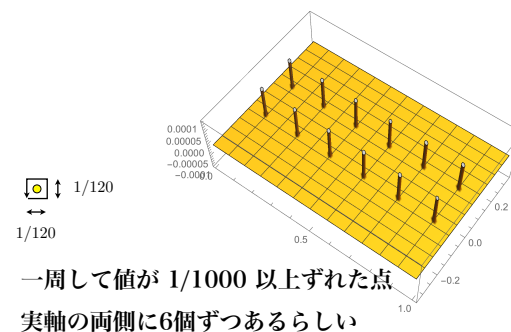
$$c + id \sim -i\omega(a + ib) = \omega(b - ia)$$

$$\text{つまり } \frac{dq}{dz} \sim -i\omega q$$

という関係を示唆する

31

8の字解の分岐点の位置



32

現時点のまとめ

- 強い力の下での三体8の字解の複素時間平面上の振る舞いを調べ始めた
- 極はないらしい
- 分岐点が実軸の両側に6個ずつあるようだ
- 分岐点の様子は未だ不明
- 分岐点を内部に含む経路で、元に戻る経路は見つかっていない
- 内部に分岐点を含まない経路で戻ると元に戻る (計算精度が確認できる)