

# 三体8の字解と それから分岐する解の 線形安定性

5周期分岐

藤原俊朗, 福田宏, 尾崎浩司

応用力学系

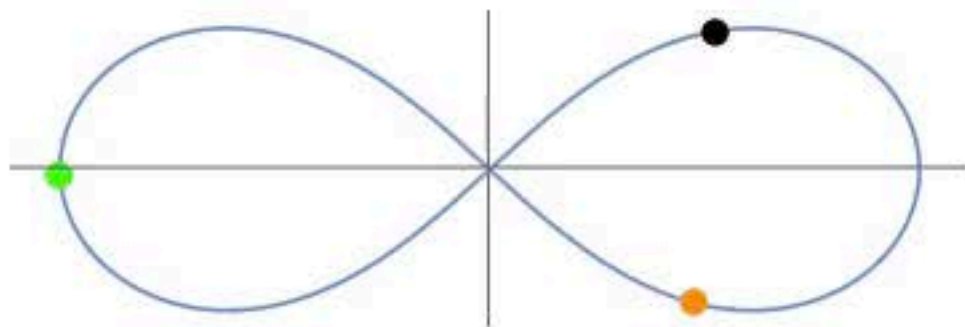
2018/09/03 応用数理学会, 名古屋

# 三体コレオグラフィと その追跡

$$L = \frac{1}{2} \sum_k \left| \frac{dq_k}{dt} \right|^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i,j} \frac{1}{|q_i - q_j|^\alpha}$$

$\alpha = 1$ : Newton potential

$$q_0(t) = q(t), q_1(t) = q(t + T/3), q_2(t) = q(t + 2T/3)$$



**figure-eight solution**

**C. Moore 1993,**

**A. Chenciner and R. Montgomery 2000**

# 作用の2階微分, 5周期

等質量平面三体問題

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left( \frac{dq_{\ell}}{dt} \right)^2 + U, \quad U = \sum_{i \neq j} V(|q_i - q_j|)$$

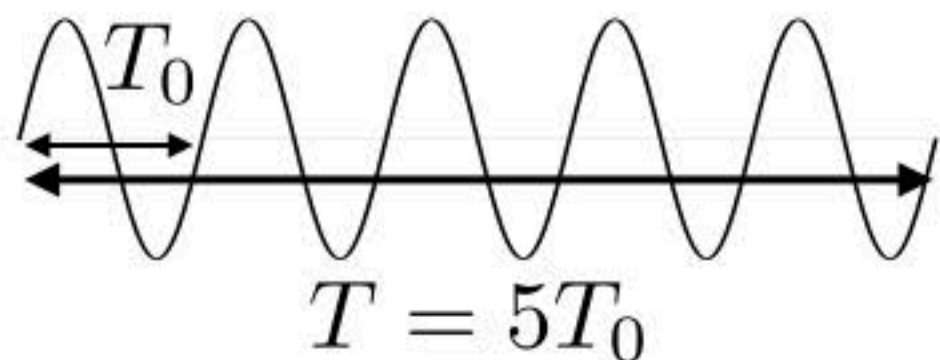
$$S[q + \delta q] = S[q] + \underbrace{\delta S[q]}_{=0} + \frac{1}{2} \int_0^T dt \sum_{i,j} \delta q_i \left( \underbrace{-\delta_{ij} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}}_{= \mathcal{H} : \text{Hesse行列}} \right) \delta q_j$$

$$\mathcal{H}\Psi = \lambda\Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \delta q_0 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \end{pmatrix}, \quad \delta q_{\ell} = \begin{pmatrix} \delta q_{\ell x} \\ \delta q_{\ell y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$\delta q_{\ell}(t+T) = \delta q_{\ell}(t)$  : 変分関数には周期性だけを課す

5周期分岐 :  $T = 5T_{\text{figure-eight}} \Rightarrow \mathcal{H}^{(5)}$

# (figure-eightの) 5回繰り返り返しでは 追加の対称性が現れる : Blochの定理

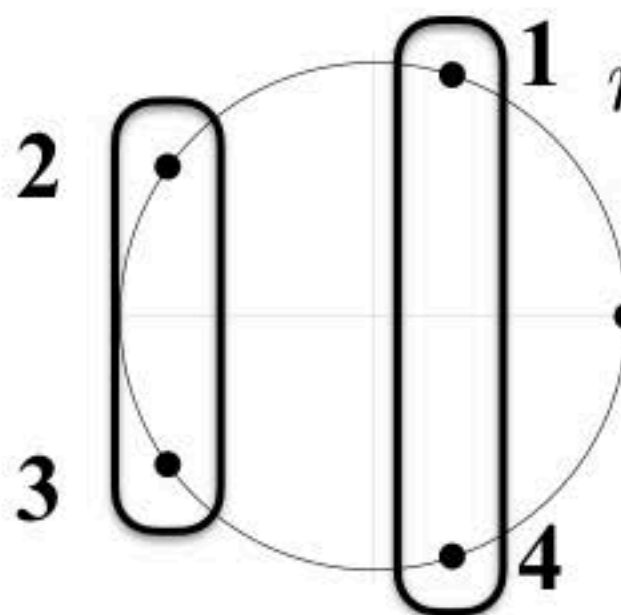


$$R^{1/5} \Psi(t) = \Psi(t + T/5) = \Psi(t + T_0),$$

$$R^{1/5} \mathcal{H}^{(5)} R^{-1/5} = \mathcal{H}^{(5)}$$

$$R^{1/5} \Psi(t) = e^{2n\pi i/5} \Psi(t)$$

固有値の分類 :  $n=0,1,2,3,4$



$n = 0$  : 単独 ← 1周期の時から存在する固有関数  
8の字解では常に正固有値

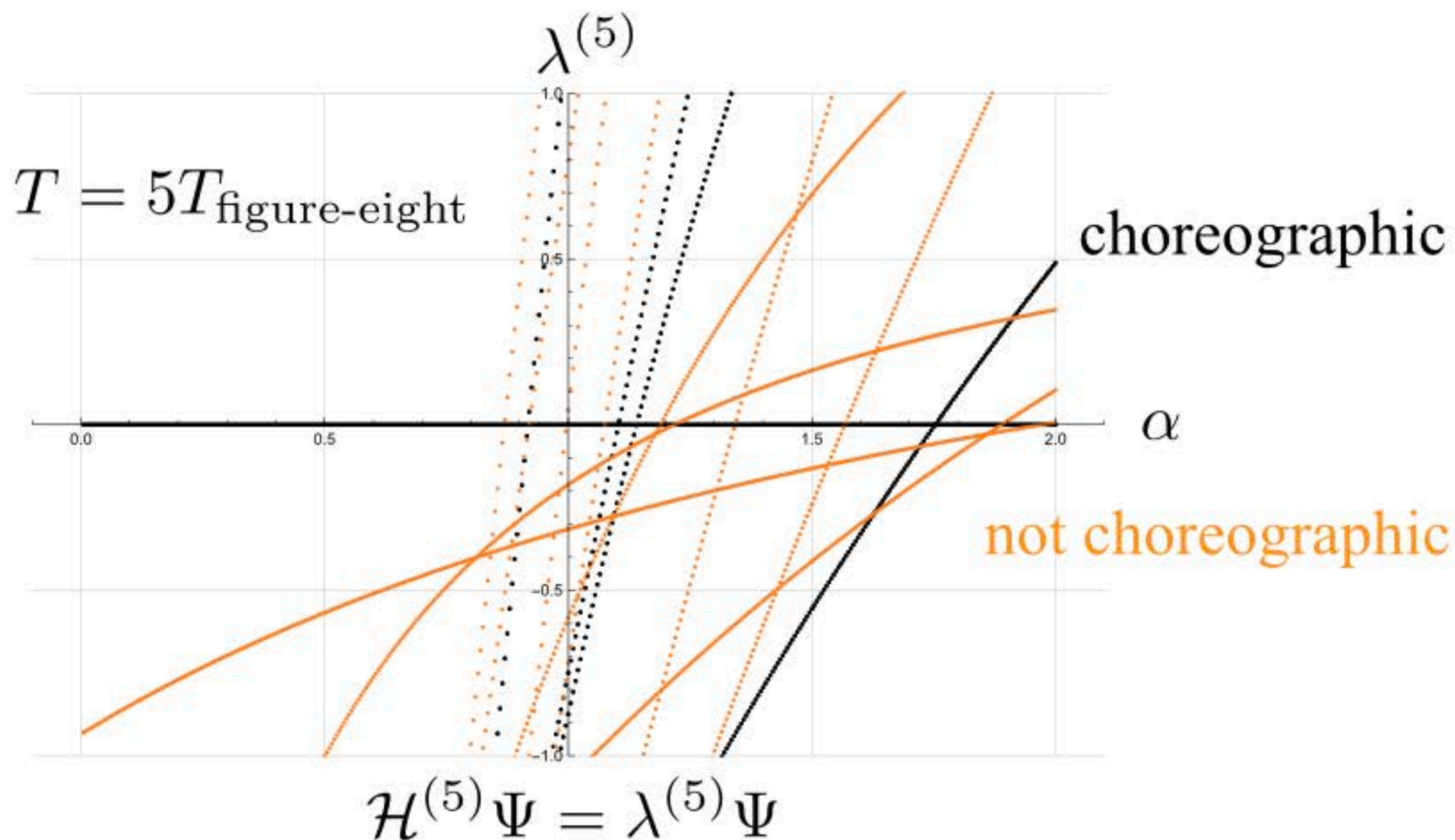
$n = 1, 4$  : 2重に縮退

$n = 2, 3$  : 2重に縮退

周期  $k$  倍分岐でも同様



# 作用のHesse行列の固有値



三体8の字解では

ゼロを横切る固有値は全て2重に縮退している

# 8の字解(1)の特性乗数 $\mu$

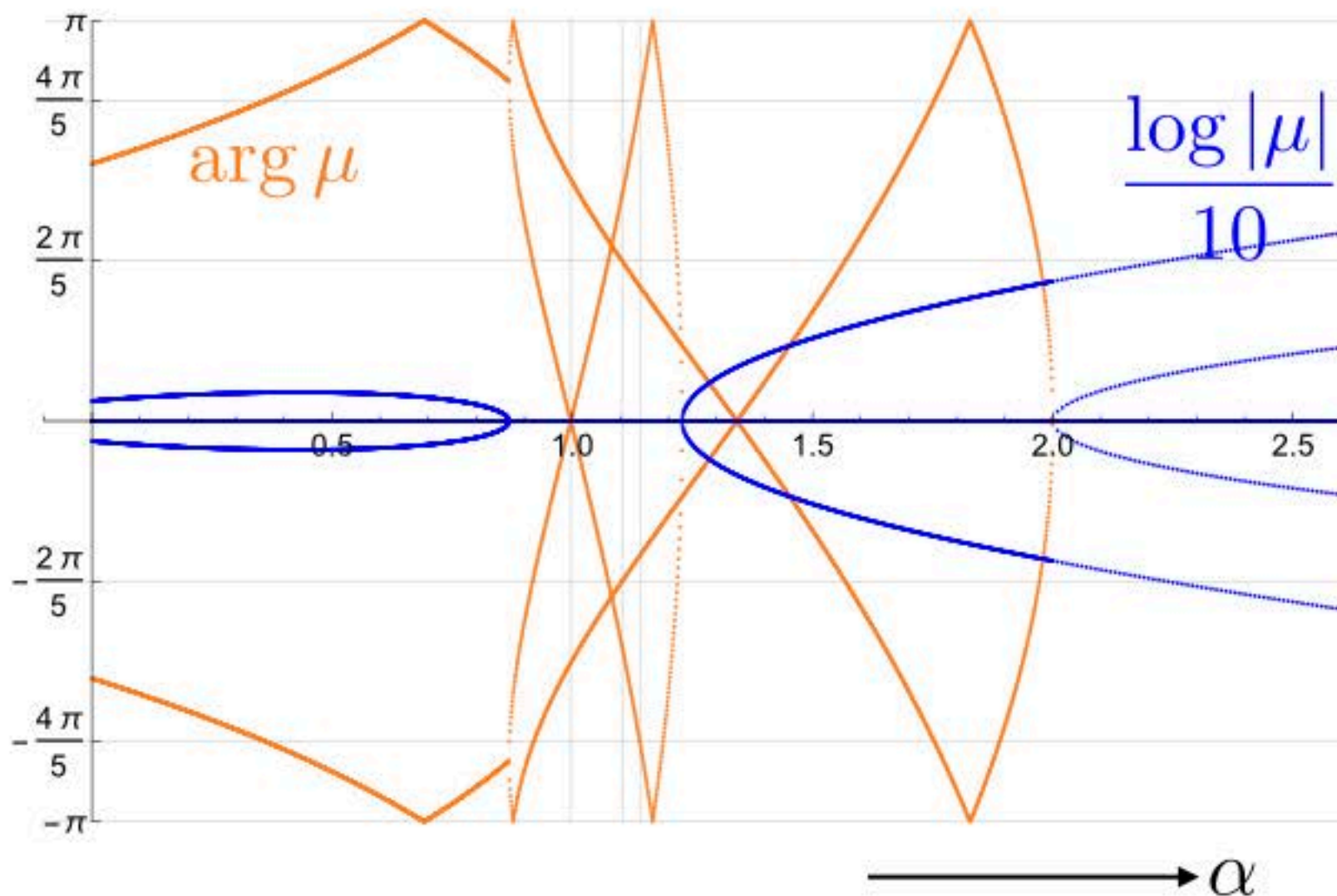
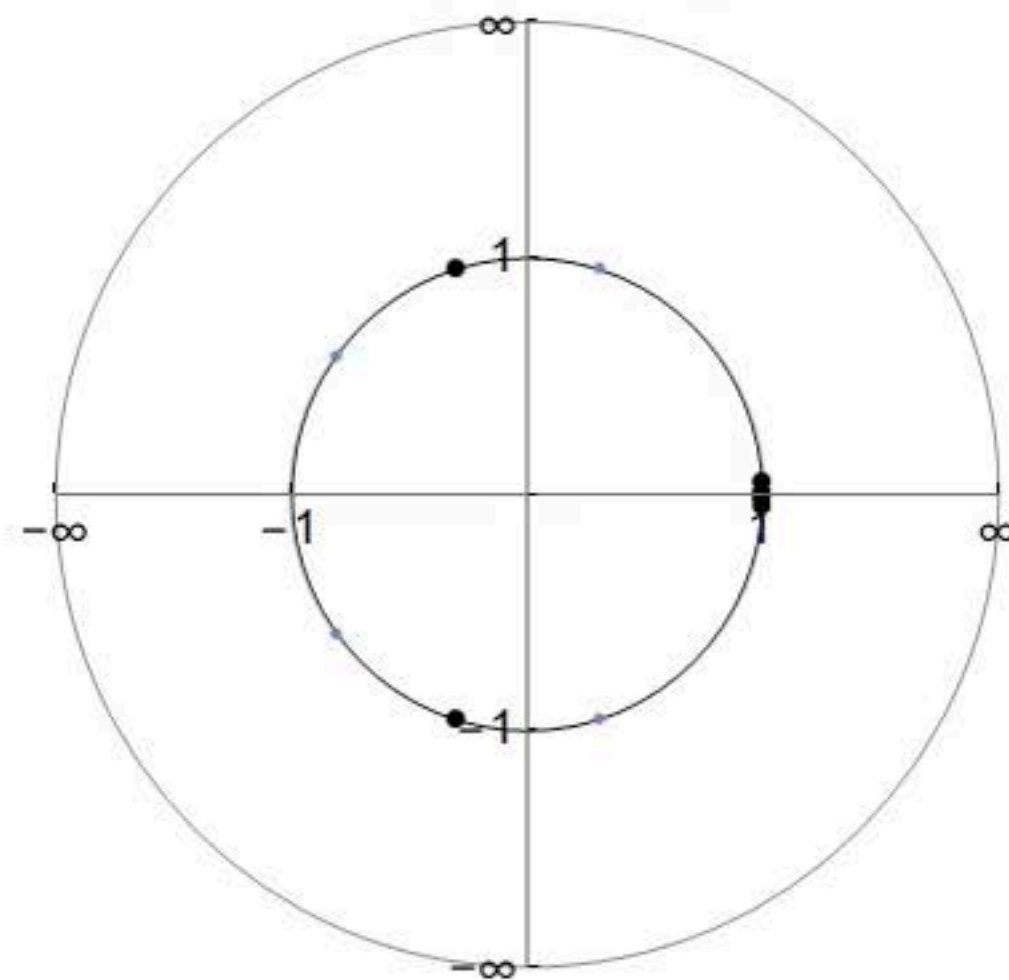


figure-eight at  $\alpha = 1.0000000$



左図と同じものは2005年6月にVanderbauwhedeから個人的に知らされていた。

2018春、彼に確認したところ「記憶にない、共同研究者の誰かが計算したものではないか」とのこと。誰が計算したのか？



# 1対1対応

$$\phi = \pm \frac{2n\pi}{5}$$

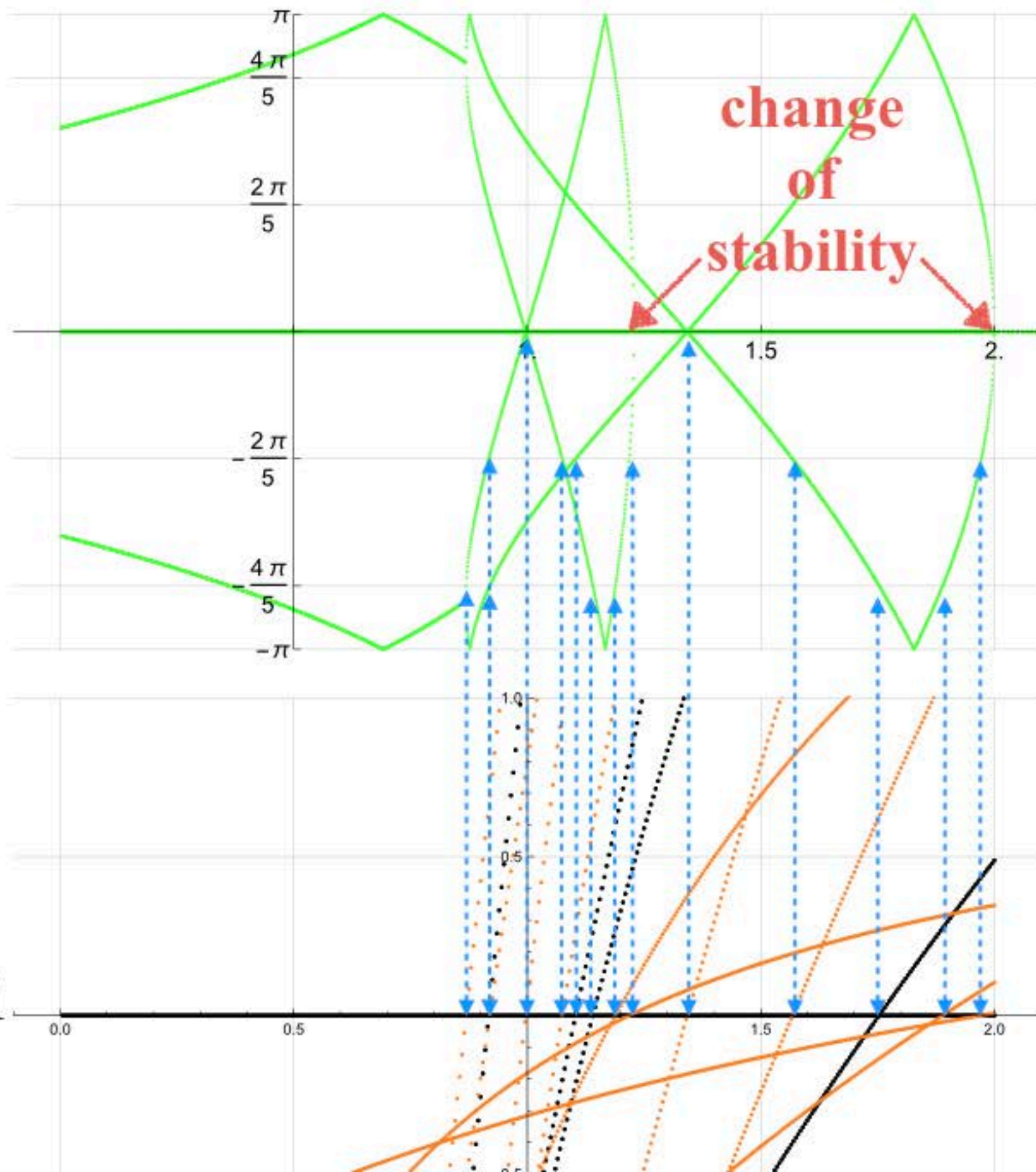
1対1

しかし

2つの例外

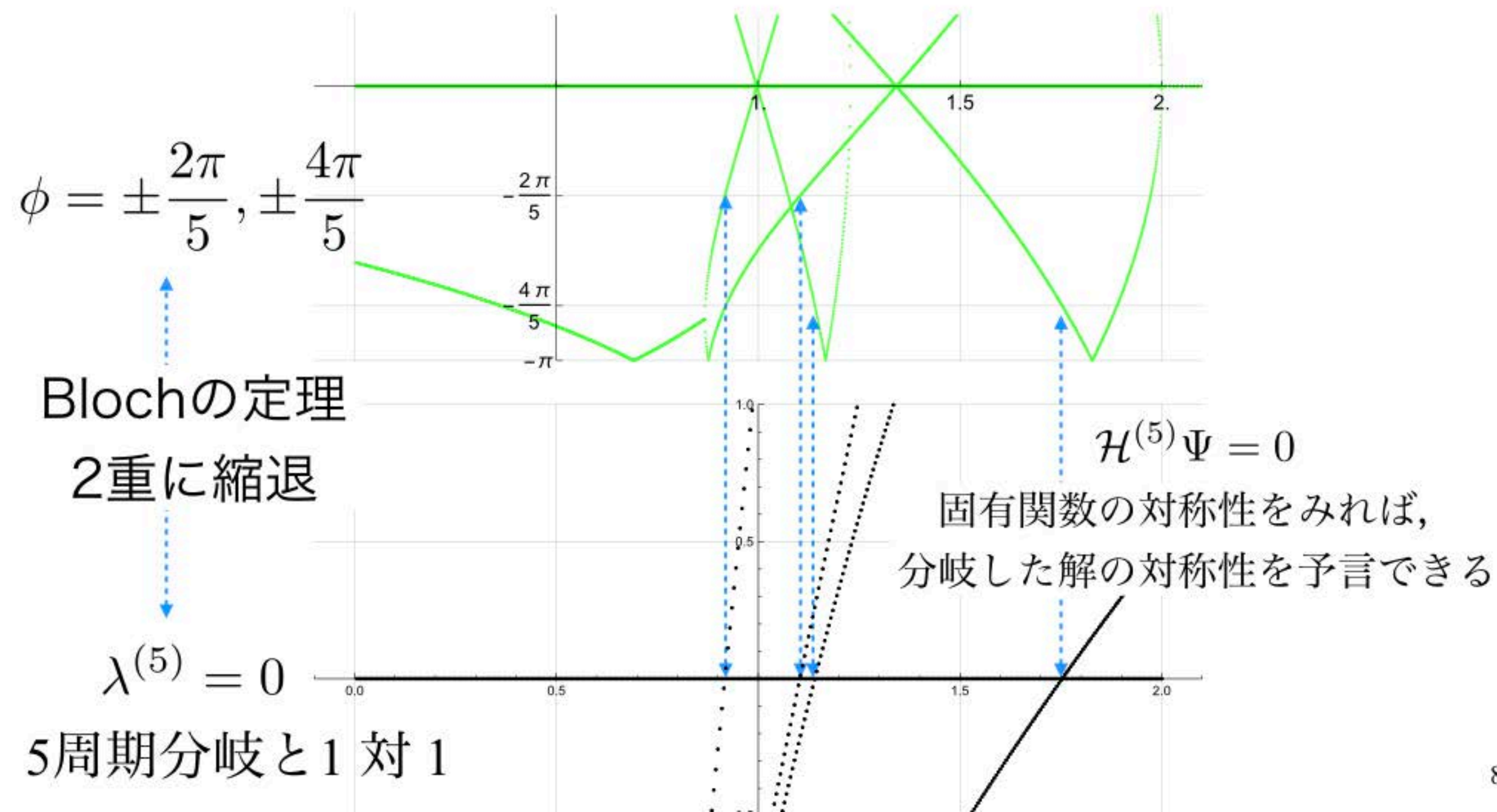
$$\lambda^{(5)} = 0$$

分岐と1対1



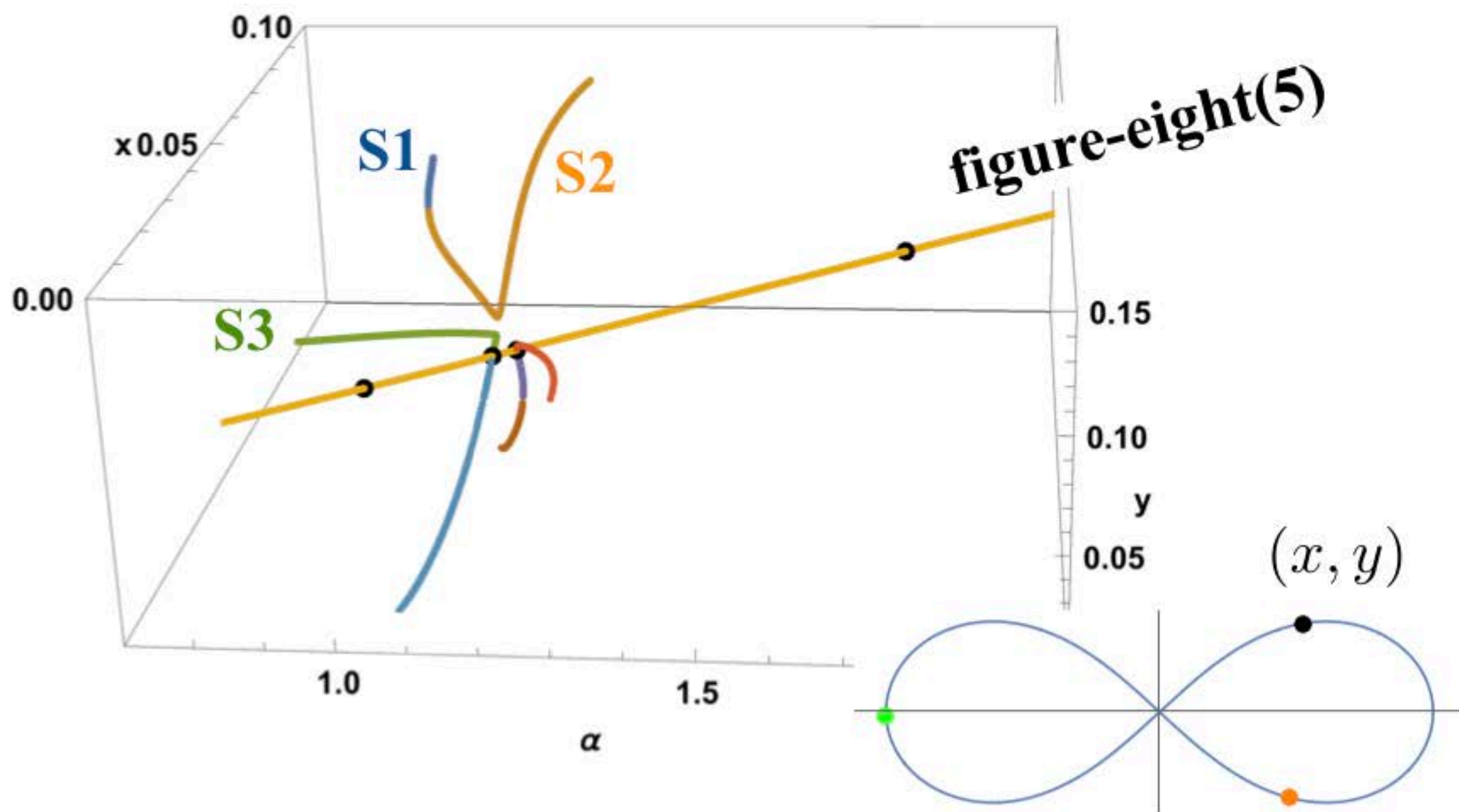
# 5周期分岐のうち

## choreographicな分岐は4箇所



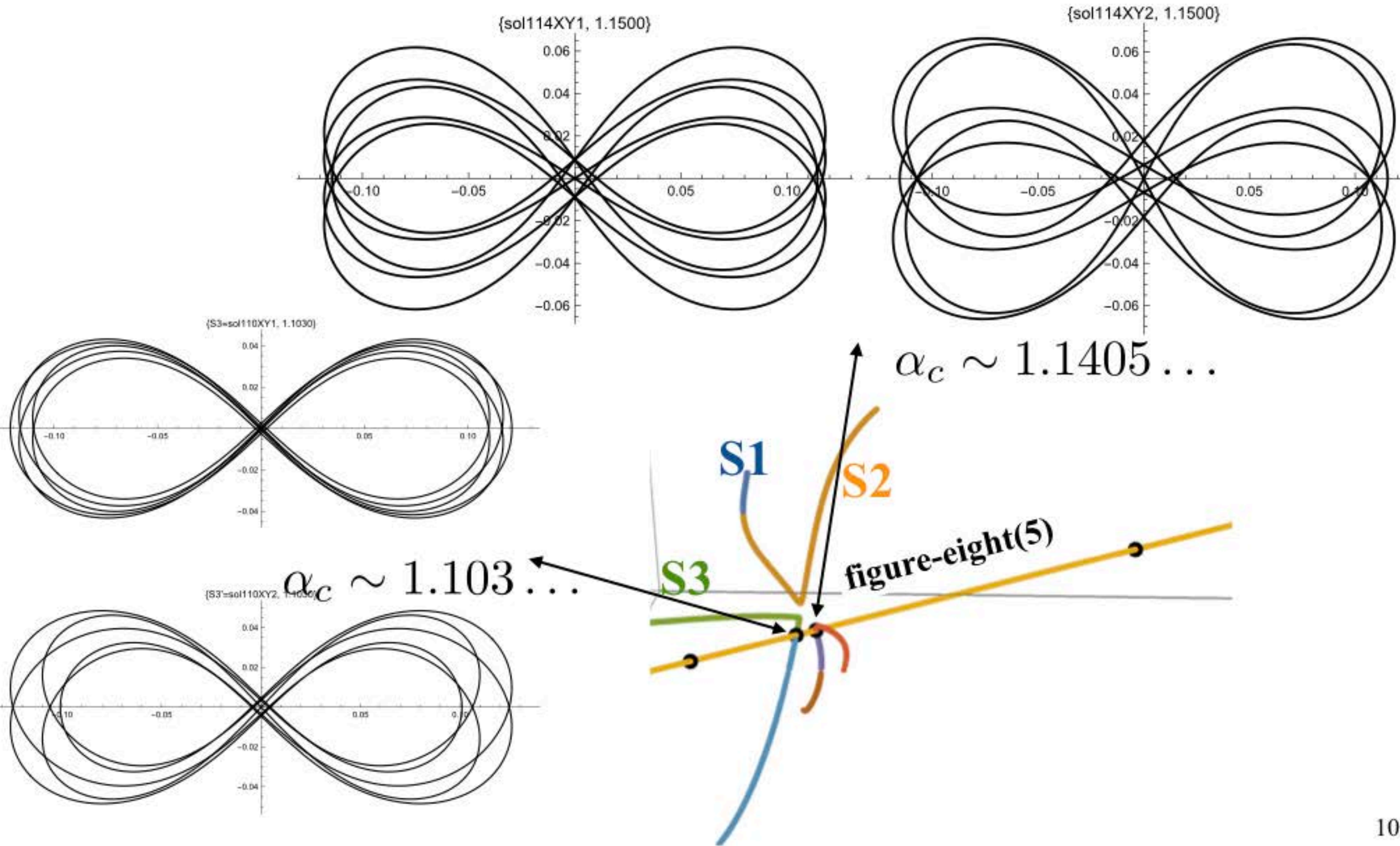


# 8の字解(5)から分岐した解のうち 8の字対称性を保つ分岐解



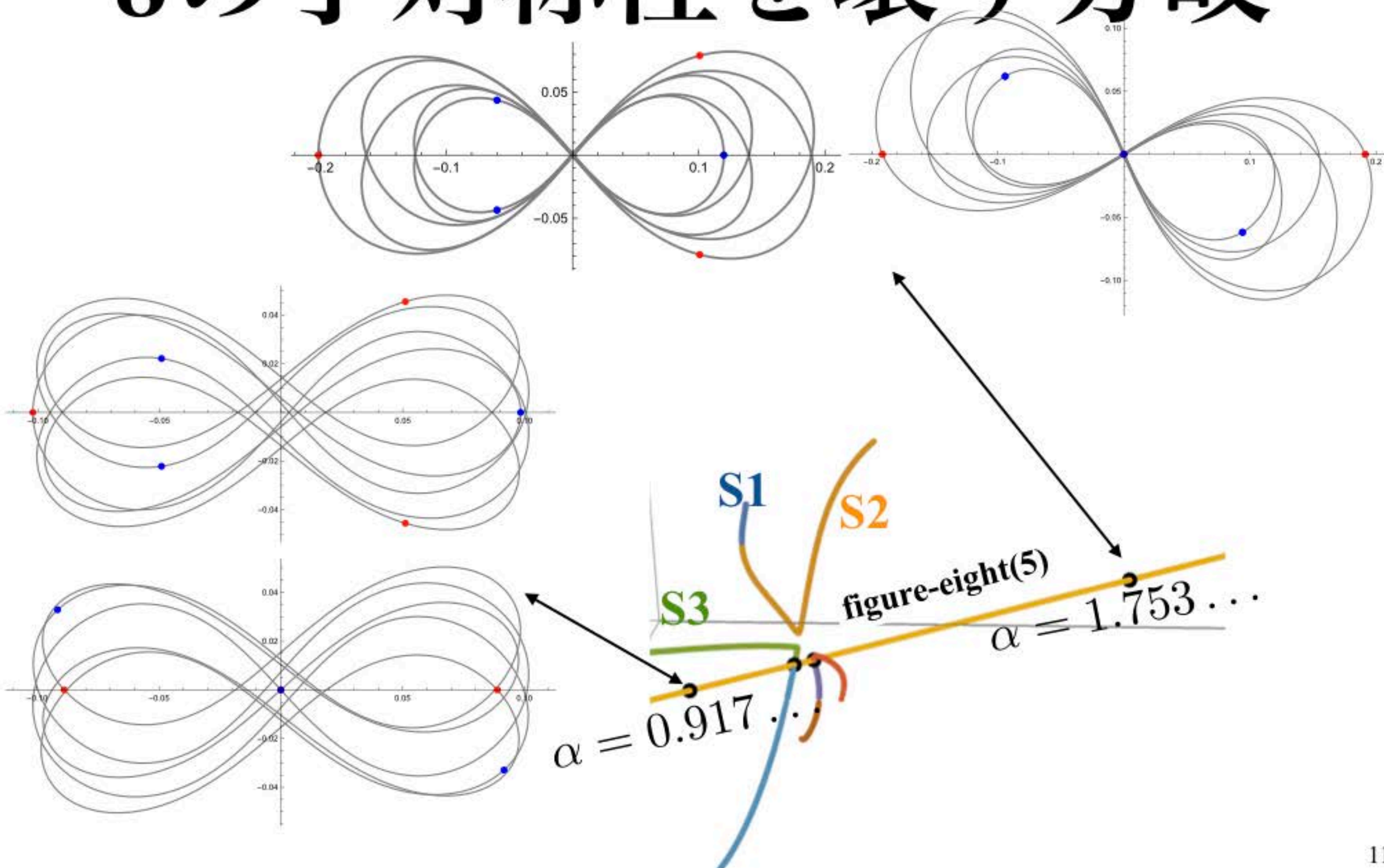
S1, S2, S3: M. Šuvakov and V. Dmitrašinović, 2013  
スラローム解

# 8の字対称性を保つ分岐





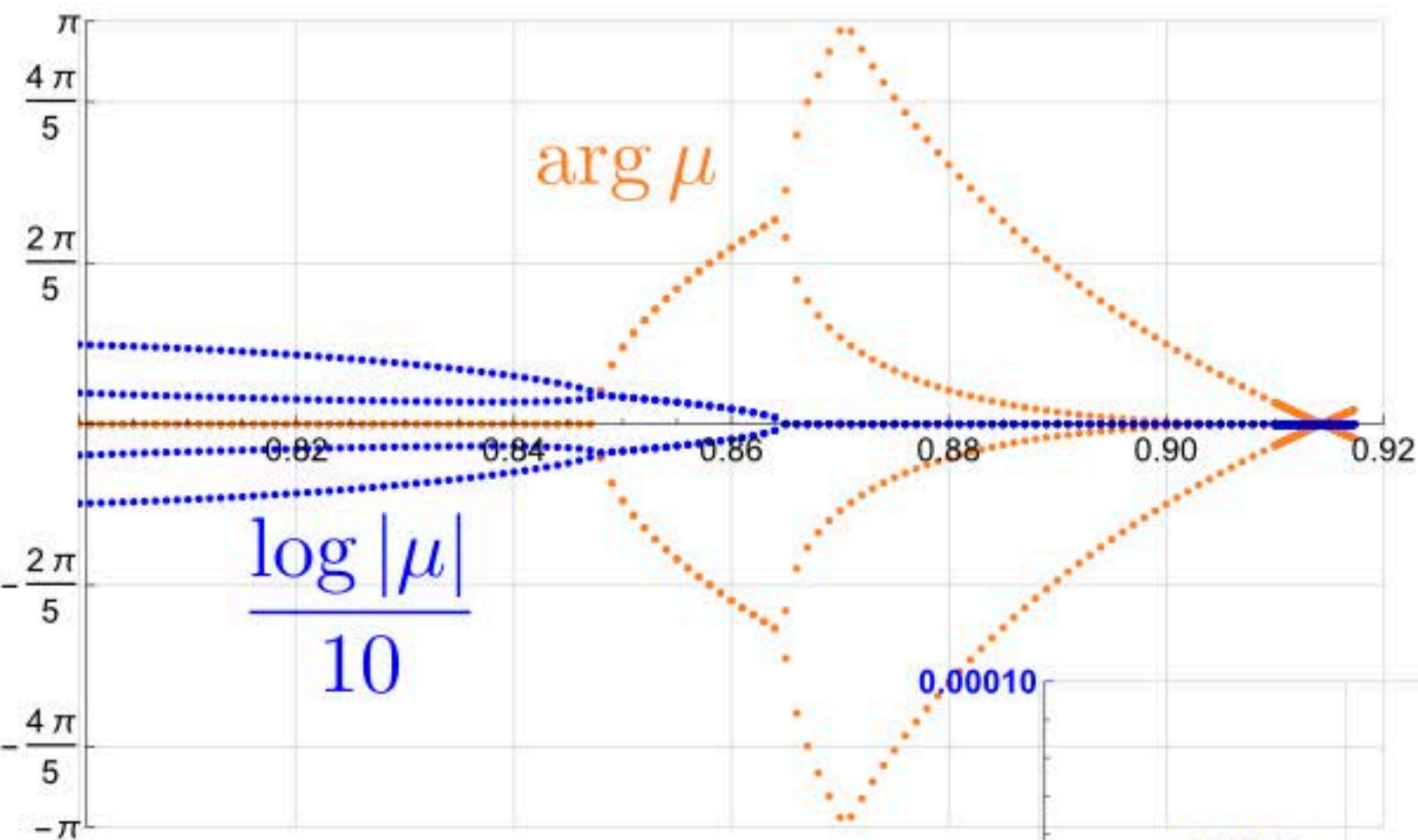
# 8の字対称性を壊す分岐





# 線形安定性

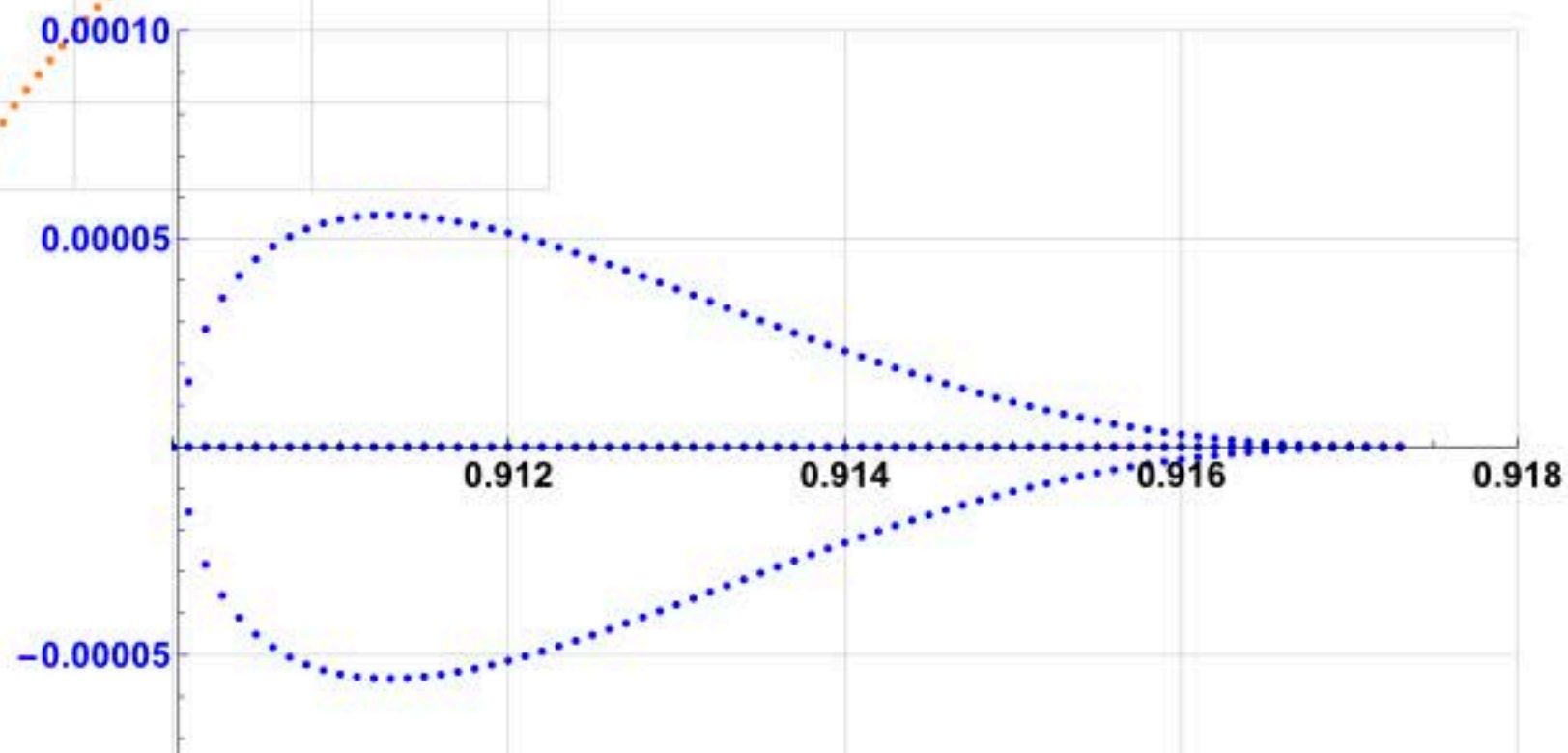
$$\alpha_c \sim 0.917\dots$$



**sol091X**

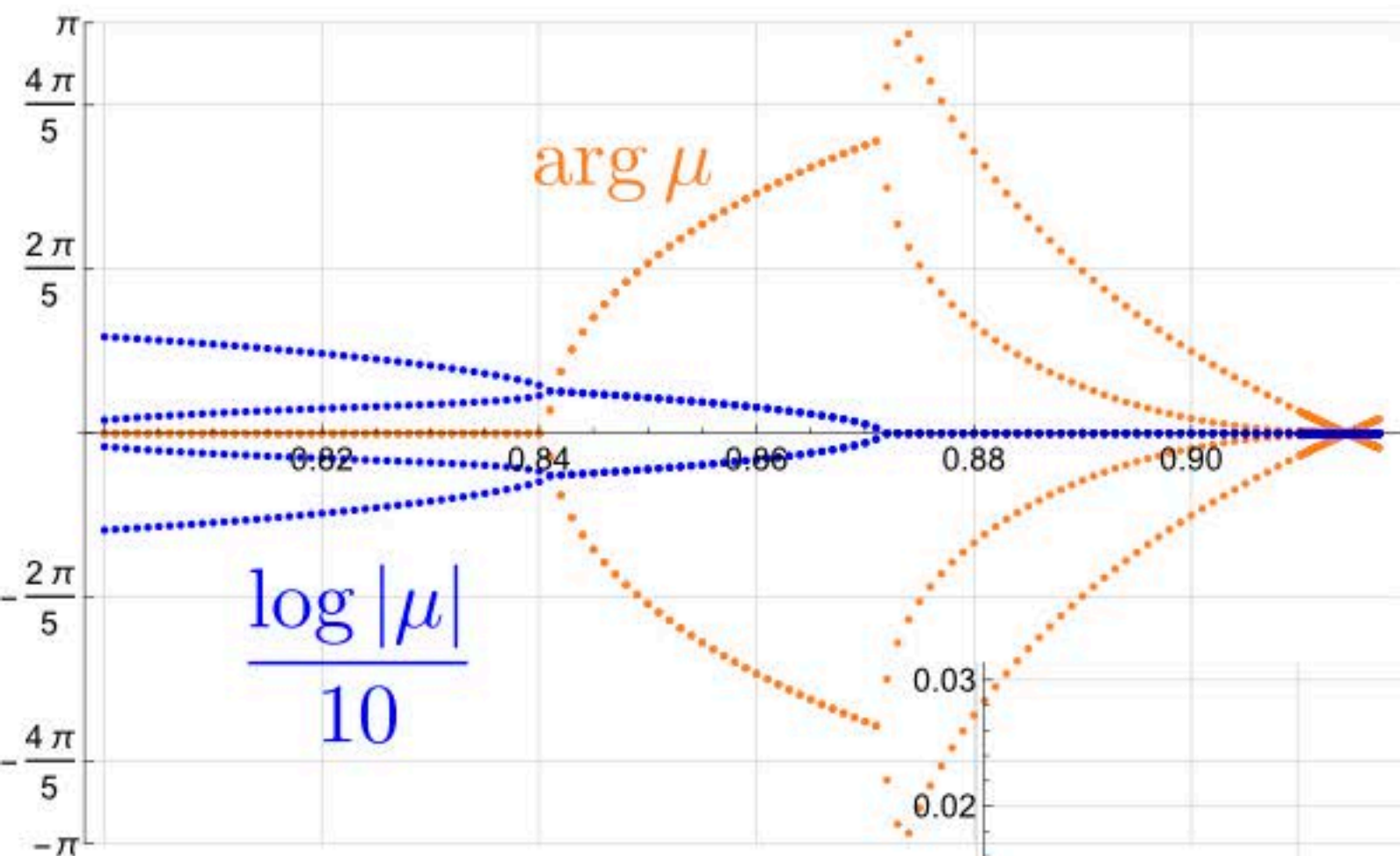
分岐点では

**HE**



# 線形安定性

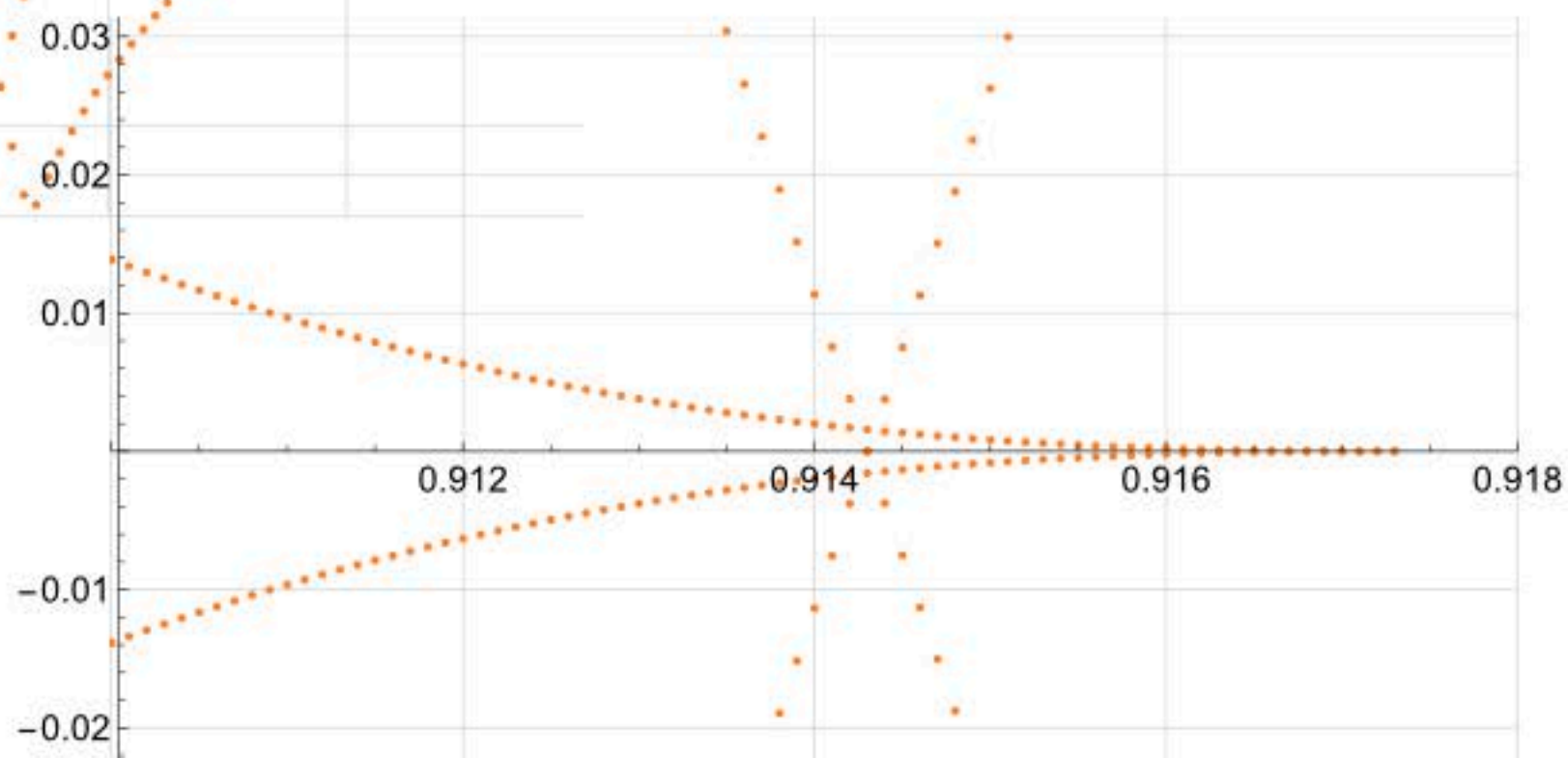
$$\alpha_c \sim 0.917\dots$$



**sol0910**

分岐点では

**EE**





# $\alpha=0.9170$ での諸量

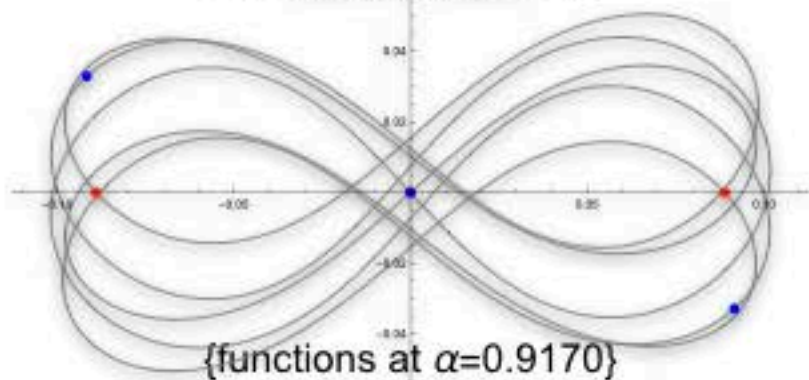
	figure8	sol091X	sol0910
作用	36.1017846	36.1017838	36.1017836
	極大	鞍点?	極小
2階微分	-0.00549223	0.44	0.57
の固有値	-0.00549223	正負不明??	0.15
	EE	HE	EE
特性	$0.999467 \pm 0.0326353 i$	1.000000022, 0.999999978	$1.00000 \pm 8 \cdot 10^{(-6)} i$
乗数	$0.991203 \pm 0.132352 i$	$0.99389320 \pm 0.11034632 i$	$0.995031 \pm 0.099570 i$
距離	0	0.0022847	0.0022866

??: 角運動量とエネルギーの保存に対応する  
 2つのゼロ固有値 (数値的にゼロではない) の間に挟まれているため  
 正とも負とも言えない. 今後の課題

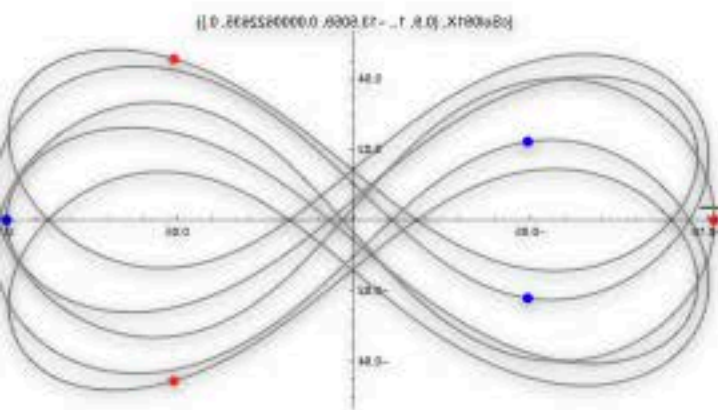




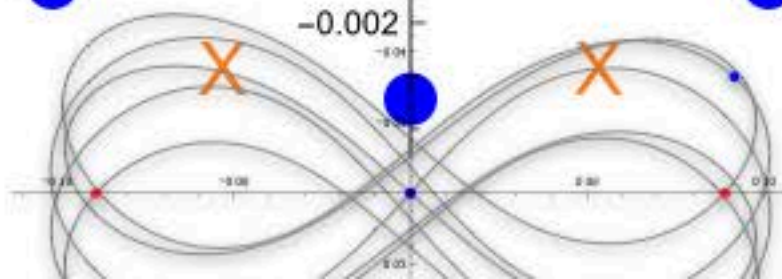
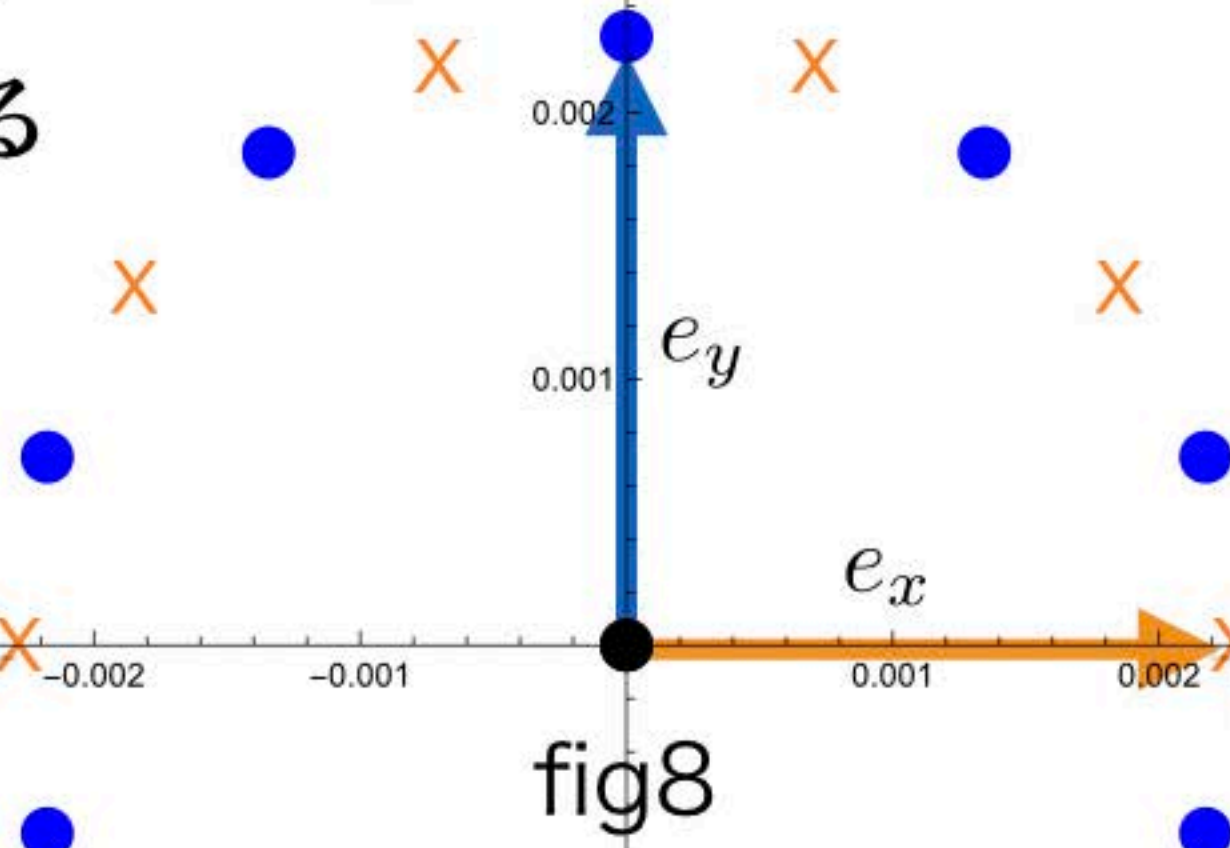
# 数値計算



関数空間での  
差から作られる  
ベクトル



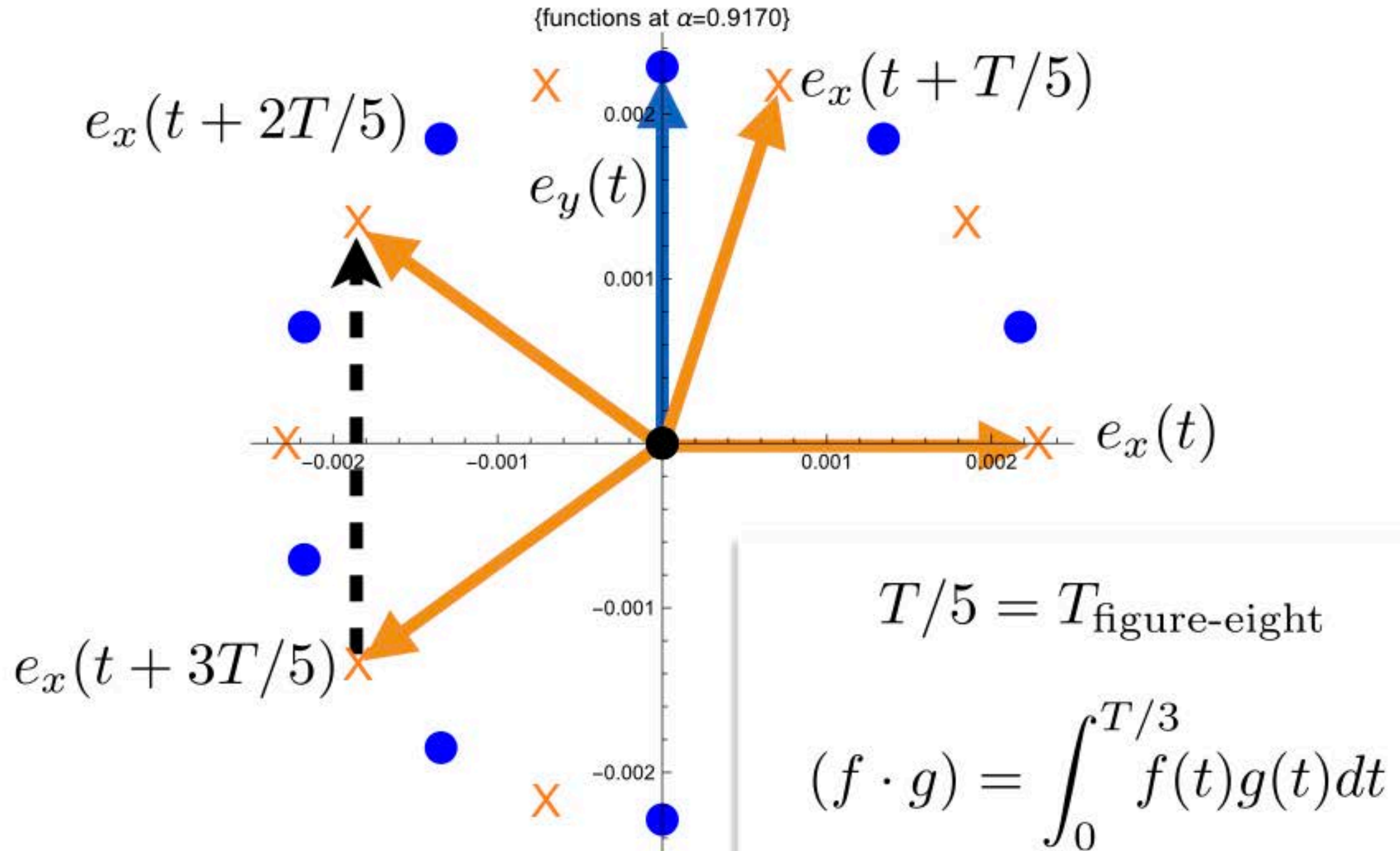
空間反転した解



空間反転した解

# 数値計算

角度および長さ：1/1000~4/1000程度の精度





# $\alpha=1.1033$ での諸量

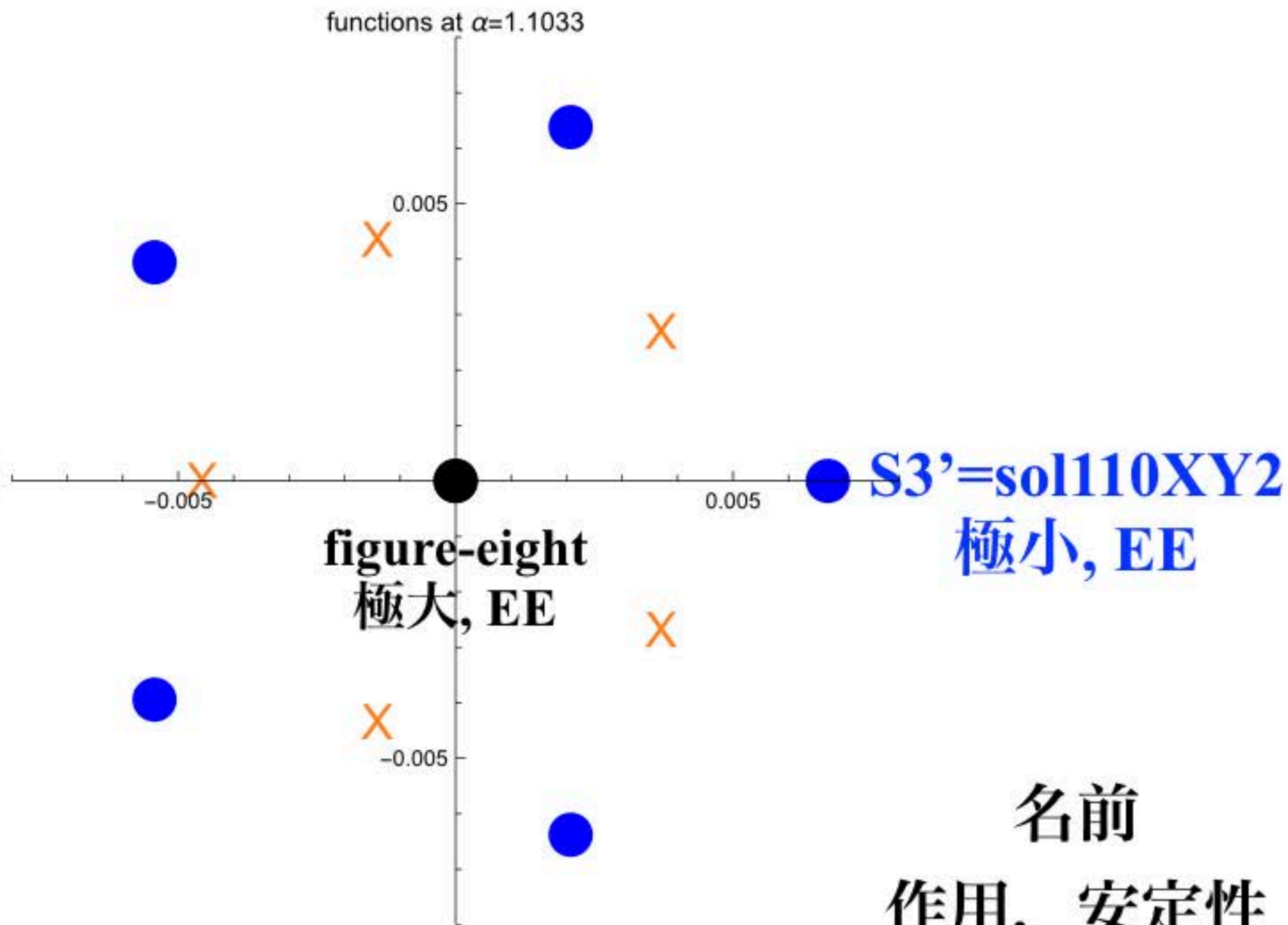
	figure8	S3	S3'
作用	41.98819467	41.98819448	41.98819432
	極大	鞍点	極小
2階微分	-0.00027484	0.000705606	0.0001125483
の固有値	-0.00027484	-0.000325204	0.0000785995
	<b>EE</b>	<b>HE</b>	<b>EE</b>
特性	<b>0.999999 ± 0.00106192 i</b>	<b>1.0019, 0.99815</b>	<b>0.999996 ± 0.002950 i</b>
乗数	<b>-0.831121 ± 0.556091 i,</b>	<b>-0.91892 ± 0.39444 i</b>	<b>-0.98321 ± 0.18249 i</b>
距離	0	-0.00457425	0.00670798

# $\alpha=1.1033$ での解の様子

$$1.10330 < \alpha_c = 1.10333 \dots$$

数値計算で  
確認した図  
誤差 $<4/1000$

$S3=sol110XY1$   
鞍点, HE



名前  
作用, 安定性

# まとめ

- 分岐点で8の字解の安定性は変化しない  
“Hesse行列のゼロを切る固有値が全て2重に縮退”している  
ことが関係？

- 5周期分岐：Hesse行列のゼロ固有値は2重に縮退（Blochの定理）

## choreographicな分岐について

- $\alpha = 0.91$  (8の字対称性を壊す) と  $1.103$  (保つ)
  - $\alpha$  を大きくすると,  $EE + (EE, HE) \rightarrow EE$
  - 8の字解(極大)と分岐解(極小)はEE, 分岐解(鞍点)はHE
  
  - $\alpha = 1.14(EE), 1.75(EH)$  は...
- 1周期分岐も別の理由でゼロ固有値が2重に縮退