レムニスケート上の運動と
楕円関数

北里大学　　　藤原俊朗
静岡県立大学　福田宏
東海大学　　　　尾崎宏

2002年２月５日（水）13:00～14:30
静岡県立大学　経営情報工学部棟２階　4213室にて

話の発端：３体問題の８の字解

C. Moore 1993:
３体問題の８の字解を発見．８の字の上を等質量の３体が追いかけっこをする．注目されず.

A. Chenciner and R. Montgomery 2000: ８の字解の存在証明．８の字解を再発見.

C. Simó 2000: ８の字解の数値解析．一つの閉曲線の上を多体が追いかけっこする運動をChoreographyと命名．たくさんの N 体 choreography を数値的に発見.

論文

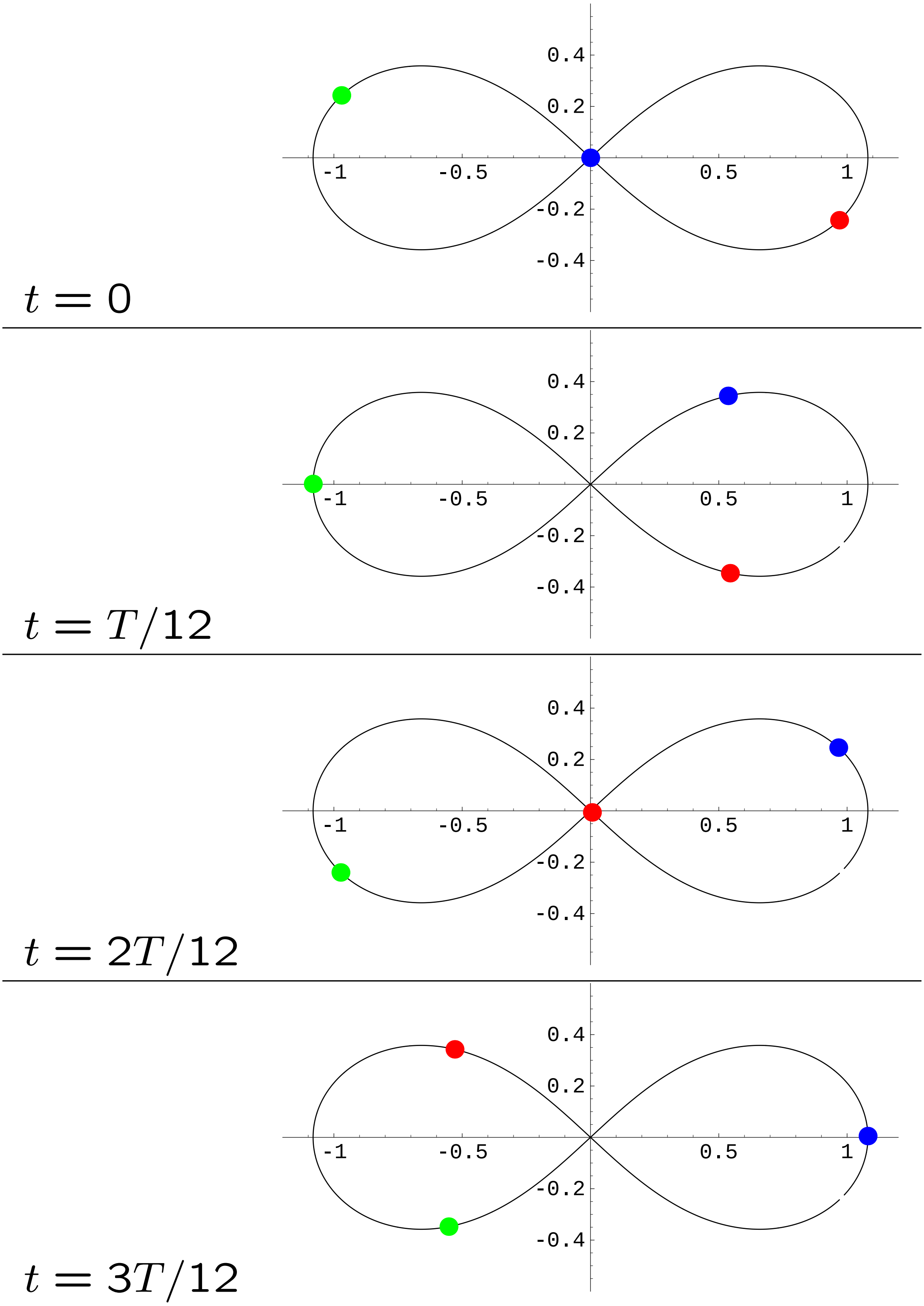
C. Moore 1993:
Braids in classical gravity,
Phys. Rev. Letter **70** 3675-3679

A. Chenciner and R. Montgomery 2000:
A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses,
Annals of Mathematics **152** 881-901

C. Simó 2001:
Proceed. 3rd European Cong. of Math., Progress in Math. **201**, (Birkäuser, Basel) 101-115

C. Simó 2002:
Dynamical properties of the figure eight solution of the three body problem, *Celestial mechanics: Dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday.* Contemporary Mathematics **292** 209-228

2001年6月17日の朝日新聞



3体8の字解：$t = 4T/12 = T/3$ は，$t = 0$（粒子の入れ替え）と同じ．

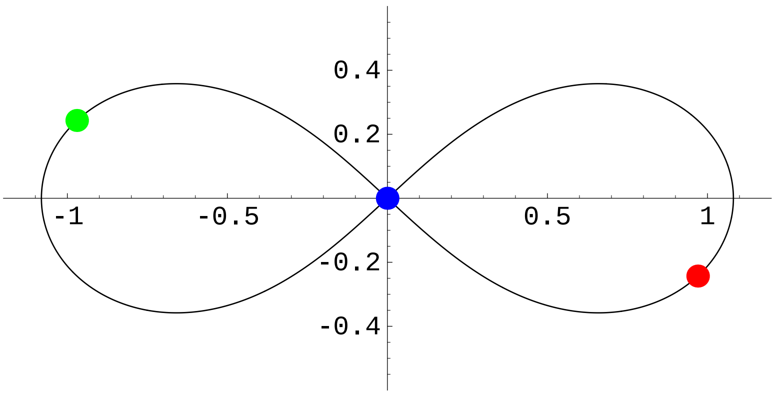
運動方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} &= \nabla_i U,\ m_1 = m_2 = m_3 = 1, \\
U &= \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{31}}, \\
x_1 &= x(t), x_2 = x(t+T/3), x_3 = x(t-T/3)
\end{aligned}
$$

角運動量：ゼロ

Simóの初期値

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= -2\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2 \\
&= (0.93240737, 0.86473146), \\
\mathbf{x}_1 &= -\mathbf{x}_2 \\
&= (0.97000436, -0.24308753), \\
\mathbf{x}_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

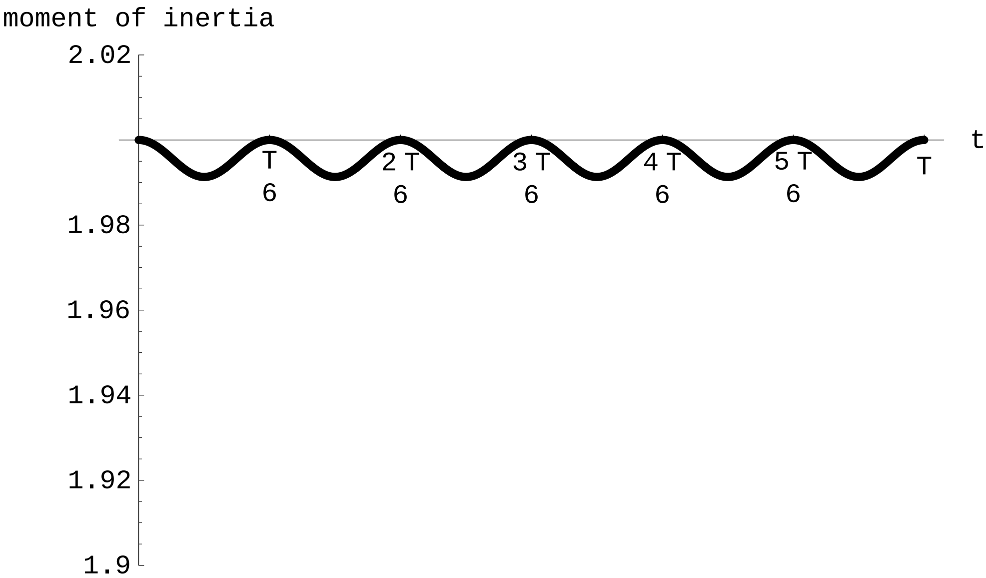


$t = 0$

周期：$T = 6.32591398...$

Simó の解では，慣性モーメント I はほぼ一定.

$$I = \sum_i \mathbf{x}_i^2$$



$$I \sim 2, \triangle I \sim 0.01 \Rightarrow \triangle I / I \sim 1/200$$

Fujiwara, Fukuda and Ozaki

- ８の字で，重心が保存して，角運動量が保存するような３点を，連続的にとれるような図形は何か？

- Simóの解はレムニスケートに似ている．

$$\Downarrow$$

- 重心の保存，角運動量の保存『３接線定理』（軌道に対する必要条件）

- 『３接線定理』を満たす４次曲線はレムニスケートのみ

- レムニスケート上の運動で，重心の保存，角運動量の保存を満たすものの明示的な表示

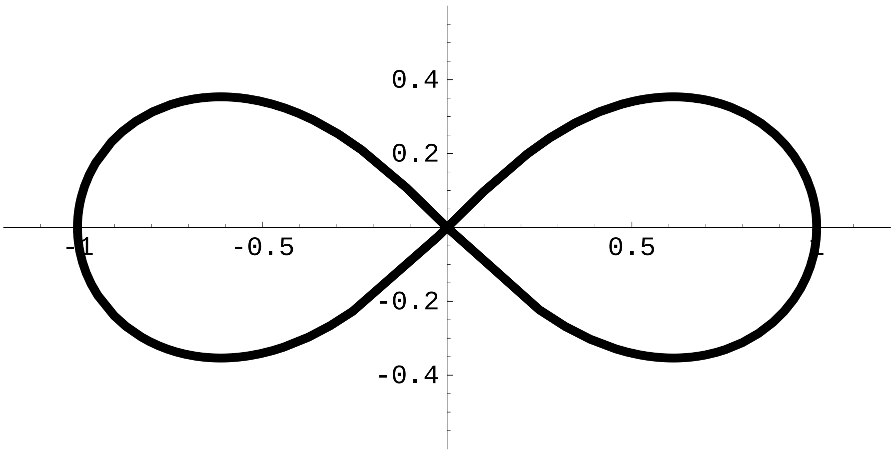
- レムニスケート上の運動が持つ，その他のたくさんの保存則

- レムニスケート上の運動が満たす運動方程式

$$\Downarrow$$

Fujiwara, Fukuda and Ozaki
Choreographic Three Bodies on the Lemniscate, to appear in *Journal of Physics A*

レムニスケート：
2点からの距離の積が一定で，原点を通る曲線



複素平面：

$$\left|\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \left|z^2-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

直交座標：

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2-y^2$$

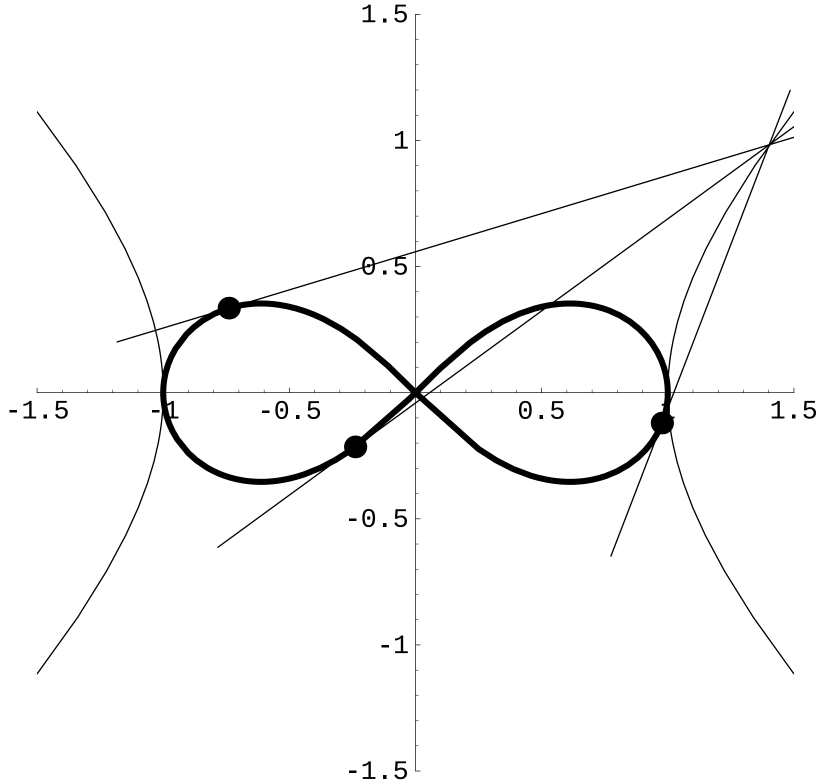
$$z = x+iy,$$

$$\frac{1}{4} = \left(z^2-\frac{1}{2}\right)\left(z^{*2}-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow z^2 z^{*2} - \frac{1}{2}\left(z^2+z^{*2}\right) = 0$$

３接線定理： 平面上の３体問題において，角運動量がゼロで，重心が保存するならば，３体から引いた接線は一点で交わる．

Fujiwara, Fukuda and Ozaki

８の字が図形として満たすべき必要条件.



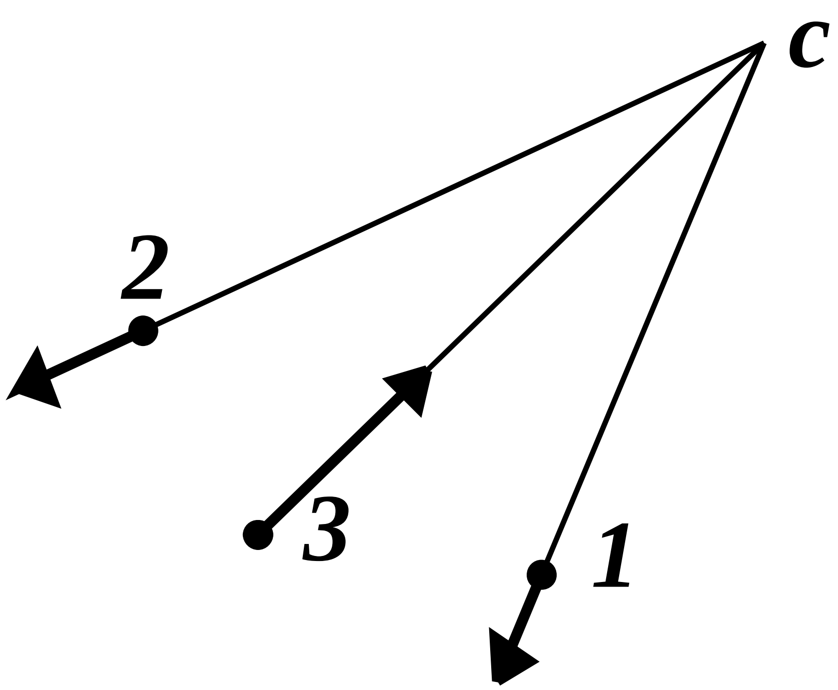
証明その１：

１）重心が保存すれば，角運動量は視点を変えても変わらない．

$L = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$ かつ $\sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ であれば，

$L' = \sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) \times \mathbf{p}_i = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i - \mathbf{c} \times \sum_i \mathbf{p}_i = L$

２）２接線の交点を $\mathbf{c}$ として，$\mathbf{c}$ から各粒子の角運動量を眺めると…



$\ell_1 = \mathbf{0}$, $\ell_2 = \mathbf{0}$ 従って $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \mathbf{0}$ より $\ell_3 = \mathbf{0}$.

証明その２：
連立方程式

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{p}_i, \text{ for } i = 1, 2, 3.$$

は，$\sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$ かつ $\sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ であれば，解 λ_i，$\mathbf{c}$ を持つ.

実際計算すると，

$$\lambda_i = \frac{\{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times \mathbf{v}_j\} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{(\mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}}}, \text{ with } \forall j \neq i,$$

$$\mathbf{c} = -\frac{l_i \mathbf{p}_j - l_j \mathbf{p}_i}{(\mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}}}, \text{ with } (i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$$

$\hat{\mathbf{z}}$：３体が運動している平面に直交する単位ベクトル，

ℓ_i：粒子 i の角運動量　$\ell_i = \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$.

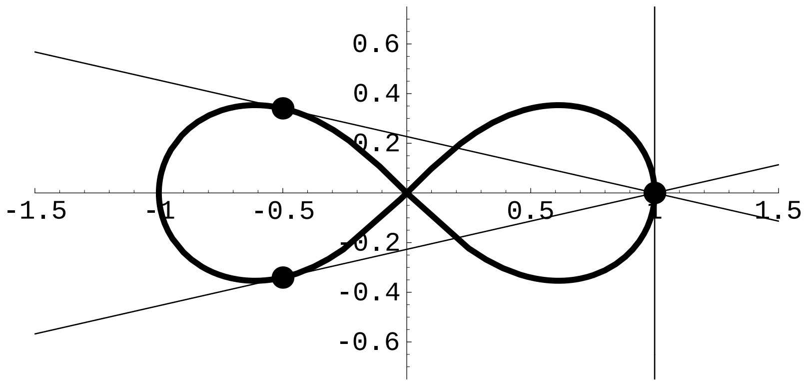
x, yの４次式，３接線定理を満たす

$$\Downarrow$$

レムニスケートを
アフィン変換したものしかない．

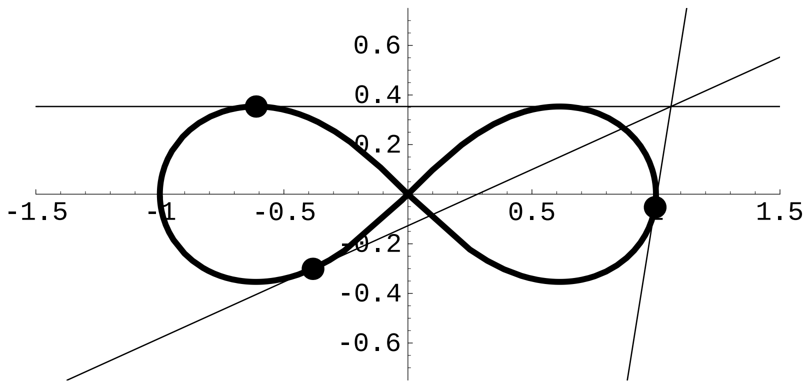
x, yの４次式：適当な変換　$x \to \mu x$, $y \to \nu y$ ののち，

$$x^4 + \alpha x^2 y^2 + \beta y^4 = x^2 - y^2.$$



$\Rightarrow \quad \alpha = 2$

（by 代数計算）



$\Rightarrow \quad \beta = 1$

（by 数値計算）

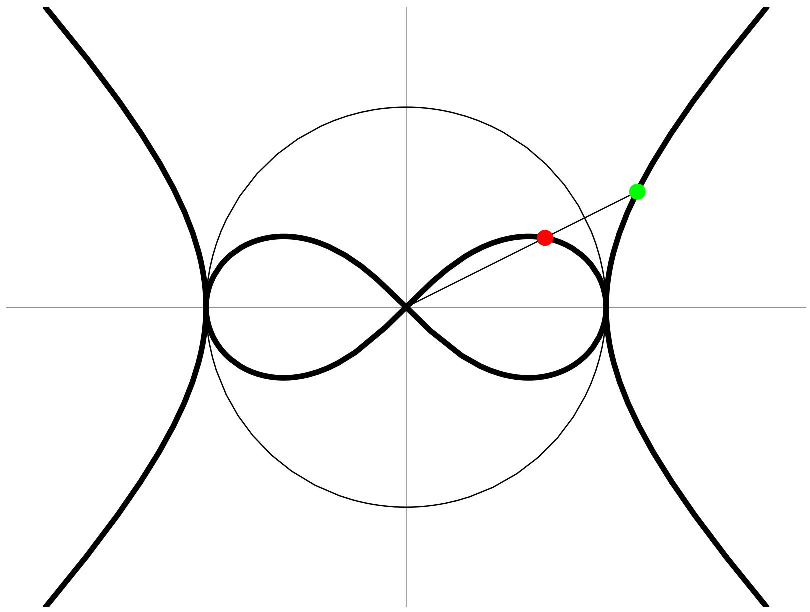
レムニスケートのparameterization

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 - \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = 1$$

Inversion

$$X = \frac{x}{x^2+y^2}, Y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

は直角双曲線.



そこで,

$$X = \frac{1}{S}, Y = \frac{C}{S}, S^2 + C^2 = 1$$

$$\Rightarrow X^2 - Y^2 = \frac{1-C^2}{S^2} = 1$$

再び，inversion して元に戻すと

$$x = \frac{S}{1+C^2}, y = \frac{SC}{1+C^2}, S^2 + C^2 = 1.$$

しかし，$S = \mathrm{sin}(t), C = \mathrm{cos}(t)$ は重心の保存を満たさない.

$$\Downarrow$$

Jacobi の楕円関数sn，cnを使って,

$$S = \mathrm{sn}(t, k^2), C = \mathrm{cn}(t, k^2)$$

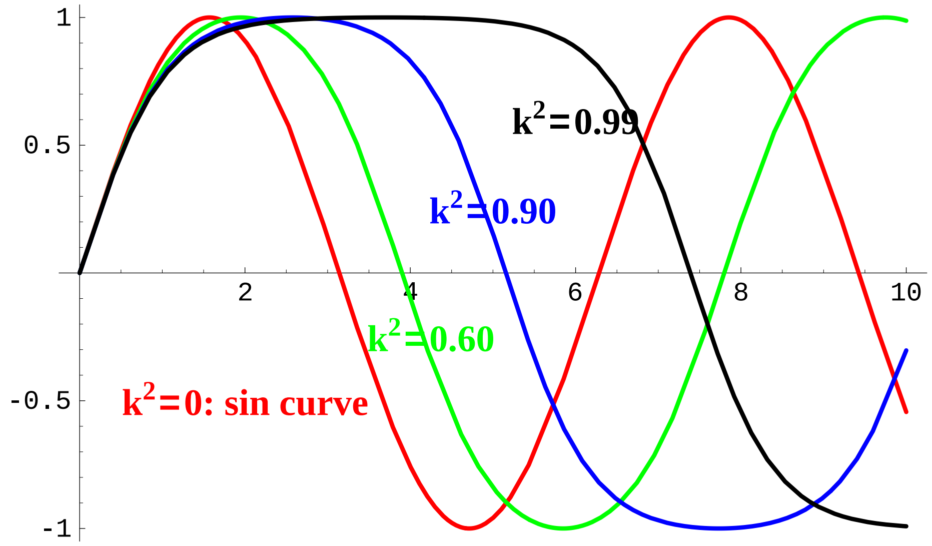
として，重心が保存するようなk^2を探す.

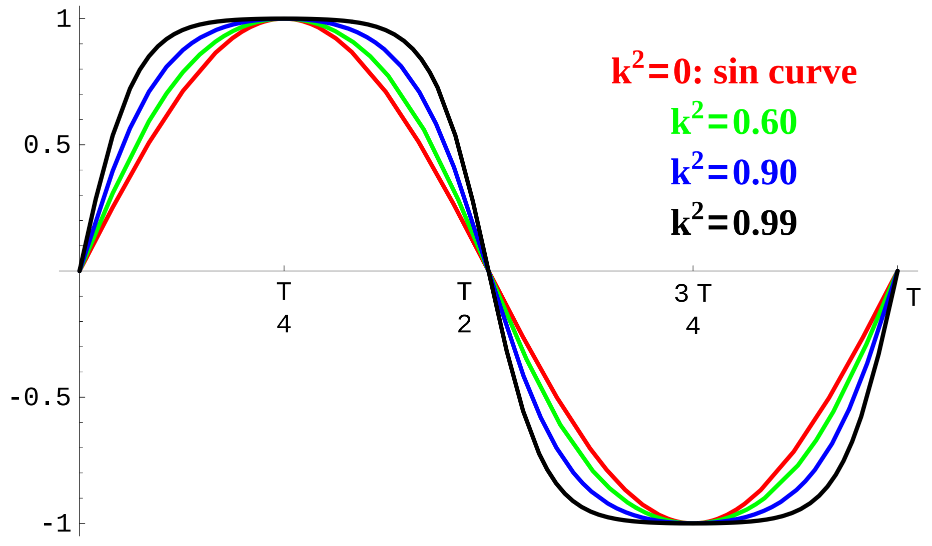
$$\Downarrow$$

$$k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = 0.933013...$$

Jacobi の楕円関数：sn

$$\mathrm{sn}^{-1}(t,k^2)=\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

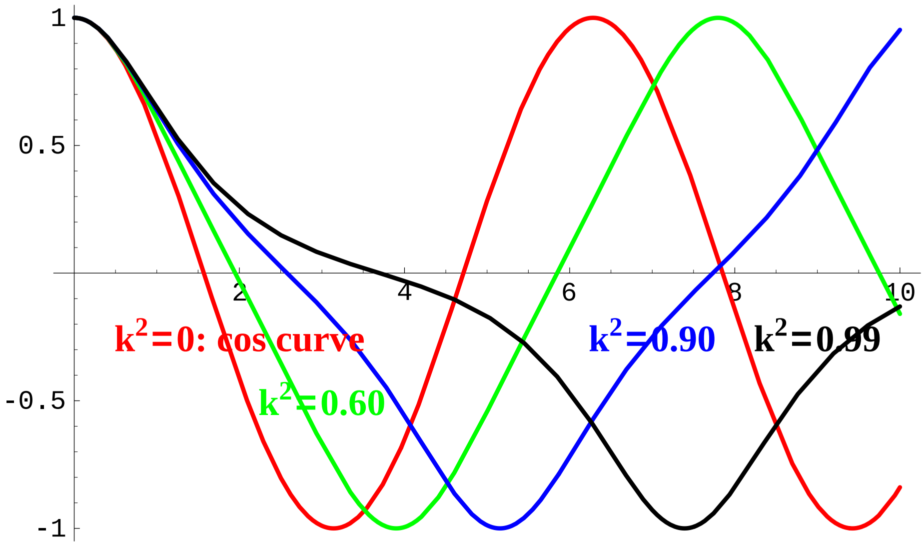


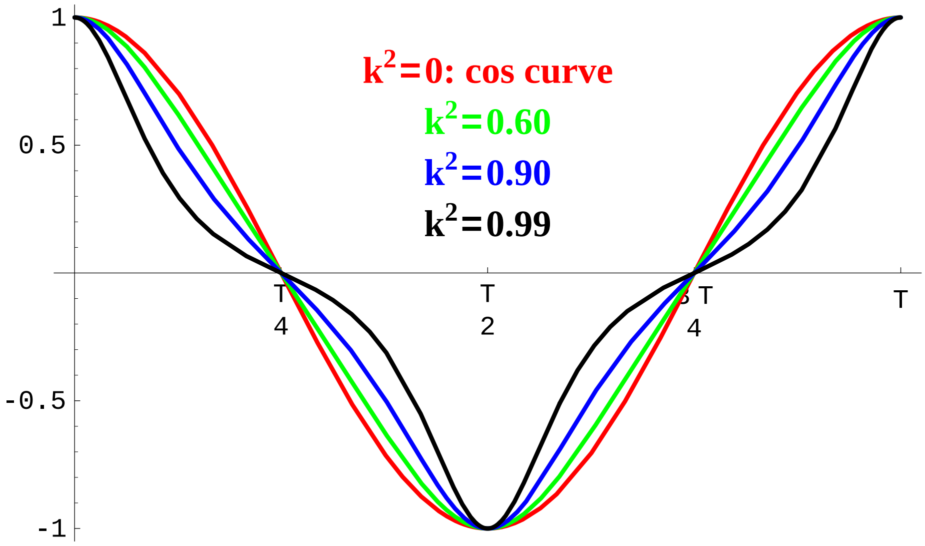


$$\mathrm{sn}(t,0)=\sin(t), \mathrm{sn}(t,1)=\tanh(t)$$

Jacobi の楕円関数：cn

$$\mathrm{cn}(t, k^2) = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2(t, k^2)}$$

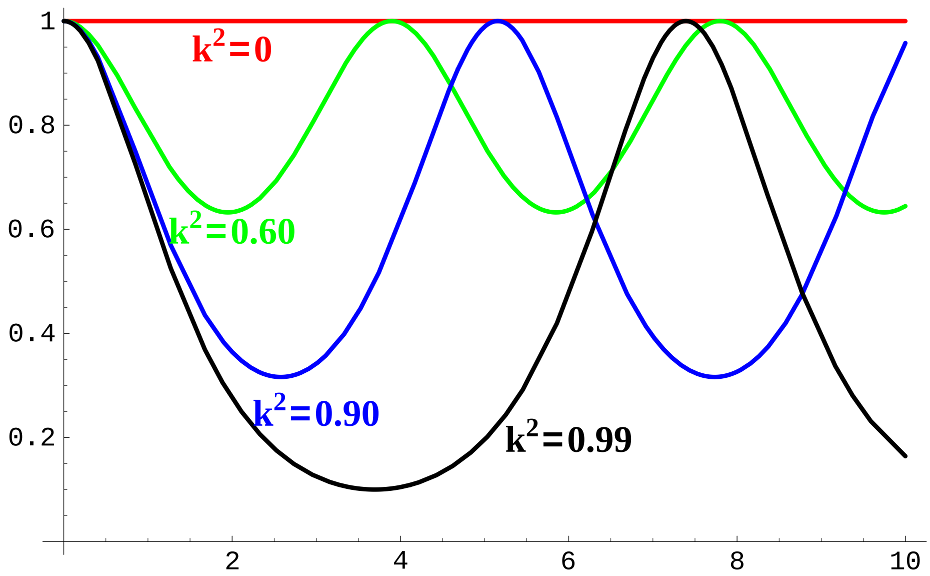


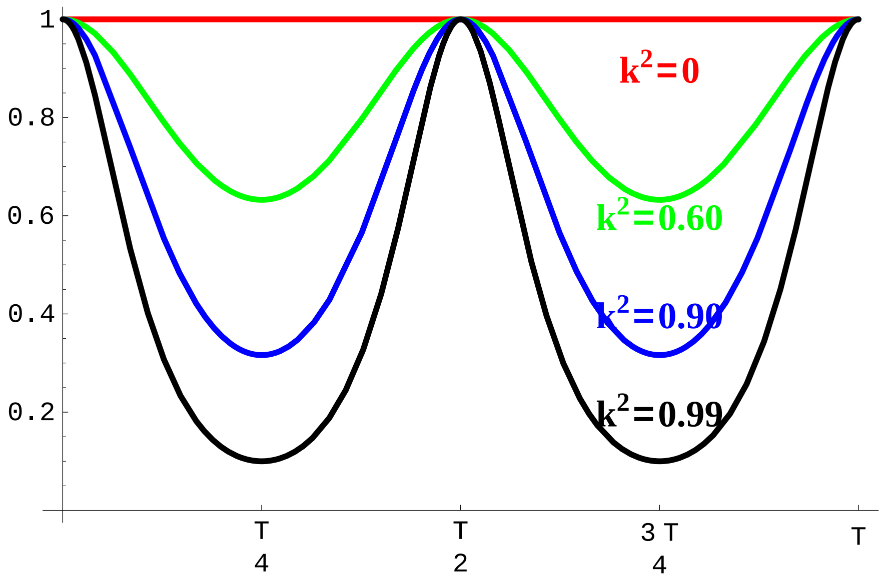


$$\mathrm{cn}(t, 0) = \cos(t), \mathrm{cn}(t, 1) = \mathrm{sech}(t) = 1/\cosh(t)$$

Jacobi の楕円関数：dn

$$\mathrm{dn}(t, k^2) = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2(t, k^2)}$$





$$\mathrm{dn}(t, 0) = 1, \mathrm{dn}(t, 1) = \mathrm{sech}(t) = 1/\cosh(t)$$

$T = 4K(k^2)$,

$$K(k^2) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

第１種完全楕円積分

sn，cn の周期は $4K(k^2)$.
dn の周期は $2K(k^2)$.

sn の微分

$$y = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$y = \mathrm{sn}^{-1}(t, k^2) \Leftrightarrow t = \mathrm{sn}(y, k^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dy} = \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$$

つまり,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\mathrm{sn}(y) &= \sqrt{(1-\mathrm{sn}^2(y))(1-k^2\mathrm{sn}^2(y))} \\ &= \mathrm{cn}(y)\mathrm{dn}(y) \end{aligned}$$

関係式：

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}^2(t)+\mathrm{cn}^2(t) &= 1,\\ k^2\mathrm{sn}^2(t)+\mathrm{dn}^2(t) &= 1\end{aligned}$$

微分：

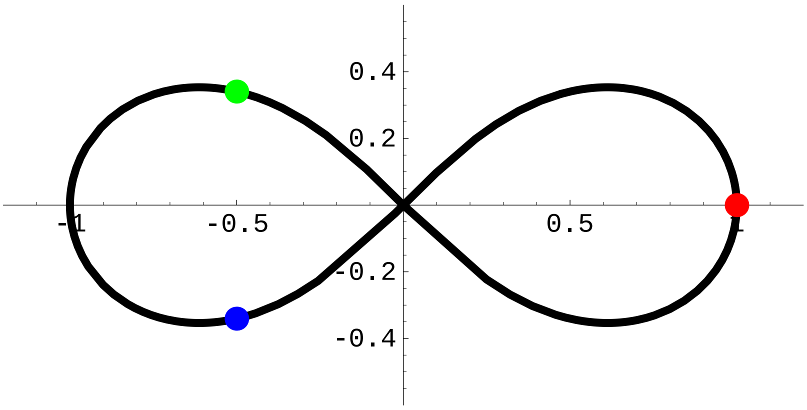
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{sn}(t) &= \mathrm{cn}(t)\mathrm{dn}(t),\\ \frac{d}{dt}\mathrm{cn}(t) &= -\mathrm{sn}(t)\mathrm{dn}(t),\\ \frac{d}{dt}\mathrm{dn}(t) &= -k^2\mathrm{sn}(t)\mathrm{cn}(t),\end{aligned}$$

加法公式：

$$\mathrm{sn}(u+v)=\frac{\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(v)\mathrm{dn}(v)+\mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)}$$

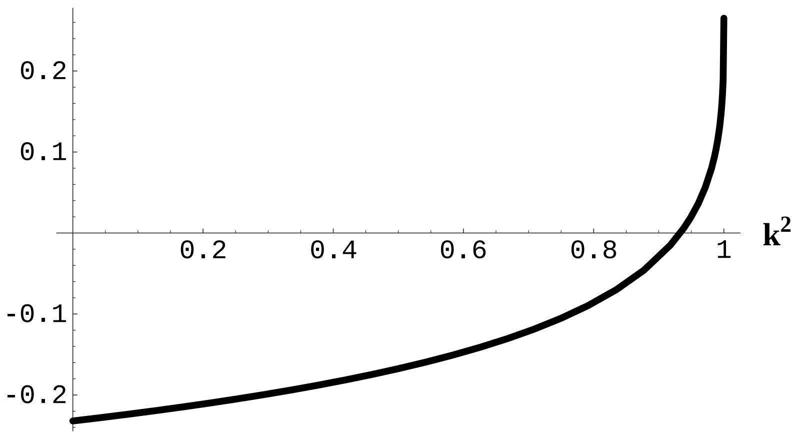
など...

重心：



$t = T/4 = K$ の時，$x(K) = 1$ なので，他の２粒子は $x(K \pm 4K/3) = -1/2$ にいなくてはならない.

$$\frac{\mathrm{sn}(-K/3)}{1+\mathrm{cn}^2(-K/3)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{sn}\left(\frac{K(k^2)}{3}\right) = \sqrt{3}-1$$



縦軸は $\mathrm{sn}(K/3) - (\sqrt{3}-1)$

数値的に解くと $k^2 = 0.933013\ldots.$

$k^2=0.933013...$ の exact な値：

加法公式

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(2u) &= \frac{2\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{1-k^2\mathrm{sn}^4(u)},\\ \mathrm{sn}(u+3K) &= -\frac{\mathrm{cn}(u)}{\mathrm{dn}(u)}\end{aligned}$$

を使って，$\mathrm{sn}(10K/3)$ を 2 通りに評価.

$$\mathrm{sn}\left(\frac{10K}{3}\right)=\mathrm{sn}(3K+\frac{K}{3})=-\frac{\mathrm{cn}\left(\frac{K}{3}\right)}{\mathrm{dn}\left(\frac{K}{3}\right)}$$

$$=\mathrm{sn}\left(4K-\frac{2K}{3}\right)=-\frac{2\mathrm{sn}\left(\frac{K}{3}\right)\mathrm{cn}\left(\frac{K}{3}\right)\mathrm{dn}\left(\frac{K}{3}\right)}{1-k^2\mathrm{sn}^4\left(\frac{K}{3}\right)}$$

これから,

$$k^2=\frac{1-2\mathrm{sn}\left(\frac{K}{3}\right)}{\mathrm{sn}^4\left(\frac{K}{3}\right)-2\mathrm{sn}^3\left(\frac{K}{3}\right)},\mathrm{sn}\left(\frac{K}{3}\right)=\sqrt{3}-1$$

従って,

$$k^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

レムニスケート上の３体コレオグラフィ

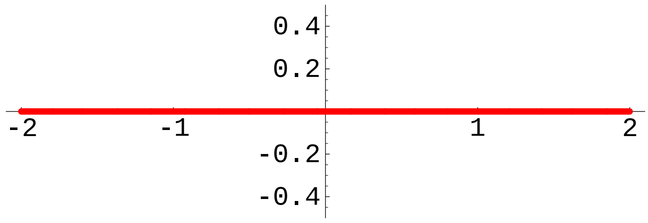
$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(t), \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}(t+T/3), \mathbf{x}_3(t) = \mathbf{x}(t-T/3)$$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathsf{sn}(t)}{1 + \mathsf{cn}^2(t)} (\mathbf{e}_x + \mathsf{cn}(t)\mathbf{e}_y)$$

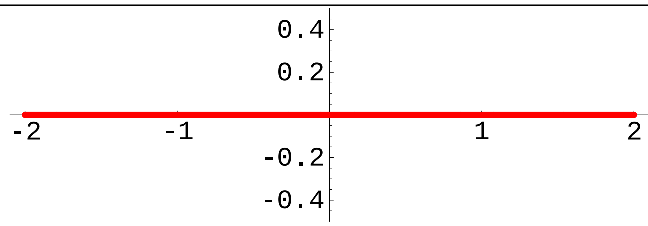
$$k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

レムニスケート上の３体コレオグラフィの保存量：数値計算

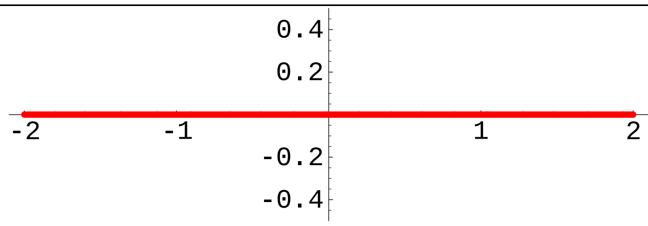
$$\sum_i x_i = 0$$



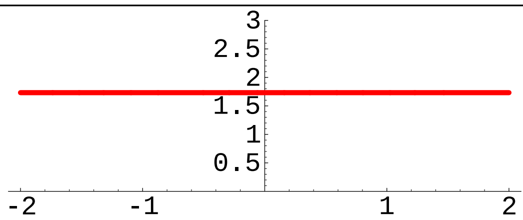
$$\sum_i y_i = 0$$



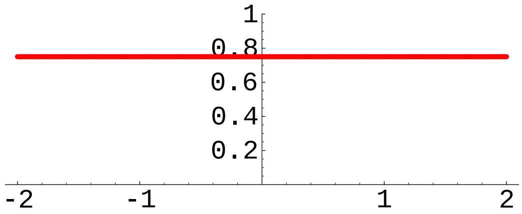
$$\sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i = 0$$



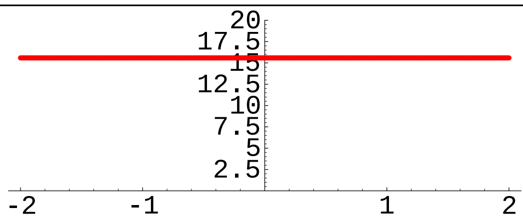
$$\sum_i \mathbf{x}_i^2 = 1.73205...$$



$$\sum_i \mathbf{v}_i^2 = 0.75$$



$$\sum_i \left(\frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{a})^2}{\mathbf{v}^6} \right)_i = 15.5885...$$



疑問：

$$\sum_i \mathbf{x}_i^2 = 1.73205... = \sqrt{3}\ ?$$

$$\sum_i \mathbf{v}_i^2 = 0.75 = 3/4\ ?$$

$$\sum_i \left(\frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{a})^2}{\mathbf{v}^6}\right)_i = 15.5885... = 9\sqrt{3}\ ?$$

証明すべき事：

$$\sum_i x_i(t) = \sum \frac{\mathsf{sn}(t)}{1+\mathsf{cn}^2(t)} = 0$$

$$\sum_i y_i(t) = \sum \frac{\mathsf{sn}(t)\mathsf{cn}(t)}{1+\mathsf{cn}^2(t)} = 0$$

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{x}_i(t)\times\mathbf{v}_i(t) &= \sum \frac{\mathsf{sn}^3(t)\mathsf{dn}(t)}{(1+\mathsf{cn}^2(t))^2}\\ &= \frac{d}{dt}\sum \frac{\mathsf{cn}(t)}{1+\mathsf{cn}^2(t)} = 0\end{aligned}$$

$$\sum_i \mathbf{x}_i^2 = \sum \frac{\mathsf{sn}^2(t)}{1+\mathsf{cn}^2(t)} = \sqrt{3}$$

もし，$\sum_i \mathbf{x}_i^2 = \sqrt{3}$ が言えれば,

$$\frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{a})^2}{\mathbf{v}^6} = \frac{9\mathsf{sn}^2(t)}{1+\mathsf{cn}^2(t)} = 9\mathbf{x}^2$$

なので，$\sum_i \left(\frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{a})^2}{\mathbf{v}^6}\right)_i = 9\sqrt{3}$ も言える．同様に,

$$\mathbf{v}^2 = \frac{\mathsf{dn}^2(t)}{1+\mathsf{cn}^2(t)} = \frac{1}{2} - \left(k^2 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{x}^2(t)$$

なので，$\sum_i \mathbf{v}_i^2 = 3/4$ も言える．

複素変数の導入：

$$x^{(\pm)}(t) = x(t) \pm iy(t),$$

$$j(t) = x^{(-)}(t)\frac{dx^{(+)}(t)}{dt}.$$

$$x^{(\pm)}(t) = \frac{\mathrm{sn}(t)}{1+\mathrm{cn}^2(t)} \pm i\frac{\mathrm{sn}(t)\mathrm{cn}(t)}{1+\mathrm{cn}^2(t)} = \frac{\mathrm{sn}(t)}{1 \mp i\mathrm{cn}(t)}$$

$$\begin{aligned} j(t) &= (x(t) - iy(t))\left(\frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt}\right) \\ &= \left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) + i\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j(t) &= \frac{\mathrm{sn}(t)}{1+i\mathrm{cn}(t)}\ \frac{d}{dt}\frac{\mathrm{sn}(t)}{1-i\mathrm{cn}(t)} \\ &= \frac{d}{dt}\frac{1}{1-i\mathrm{cn}(t)} \end{aligned}$$

従って，証明すべき事は,

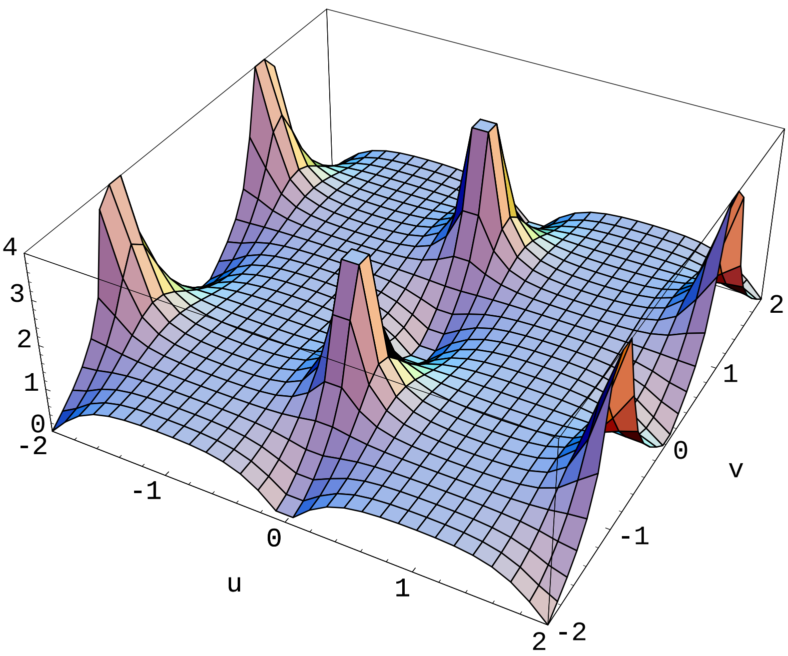
重心の保存：

$$\sum x^{(+)}(t) = \sum \frac{\mathrm{sn}(t)}{1 - i\mathrm{cn}(t)} = 0.$$

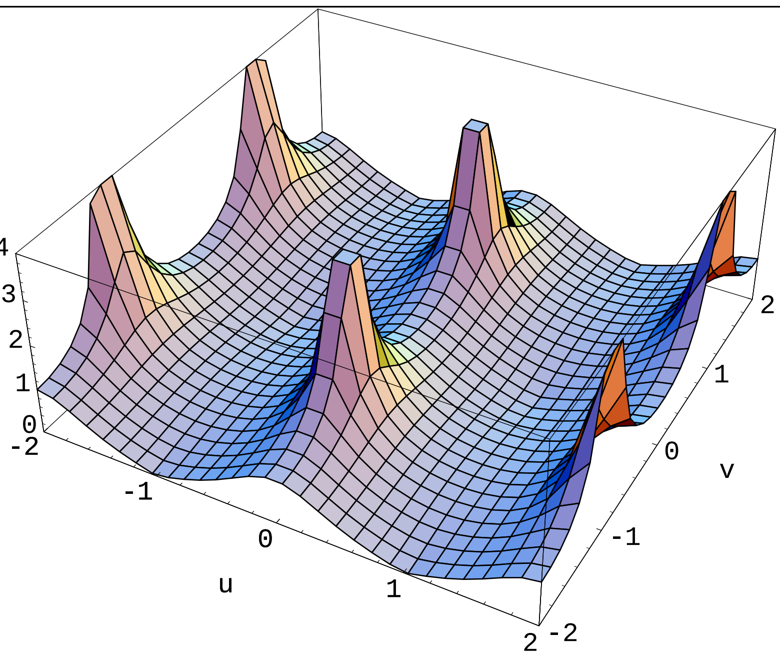
慣性モーメントの保存と角運動量がゼロ：

$$\sum \frac{1}{1 - i\mathrm{cn}(t)} = \mathrm{const.}$$

Jacobi の楕円関数の複素平面での振る舞い：



$|\mathrm{sn}(uK + ivK')|$



$|\mathrm{cn}(uK + ivK')|$

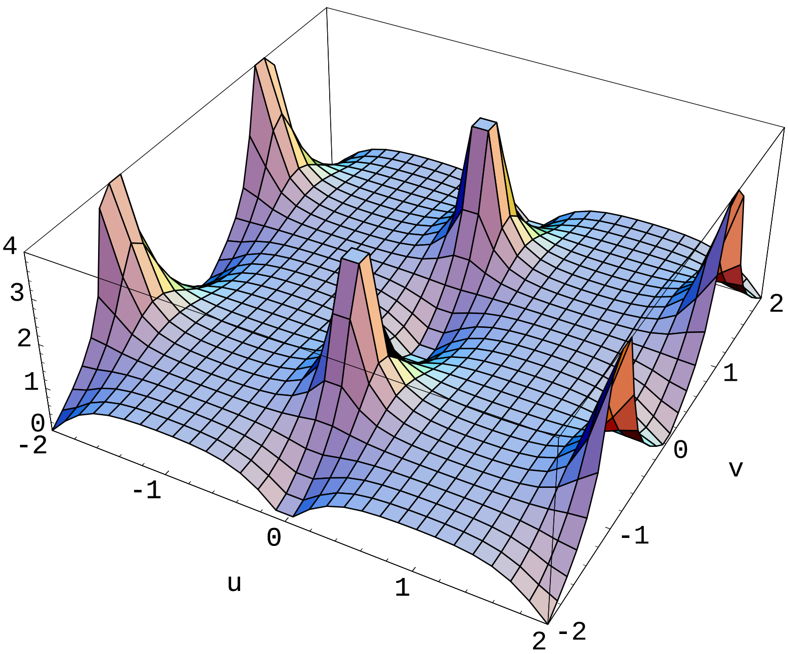
sn と cn は同じ位置で無限大になる．なぜなら $\mathrm{sn}^2(t) + \mathrm{cn}^2(t) = 1$.

snの複素平面上でのふるまい：

２重周期：

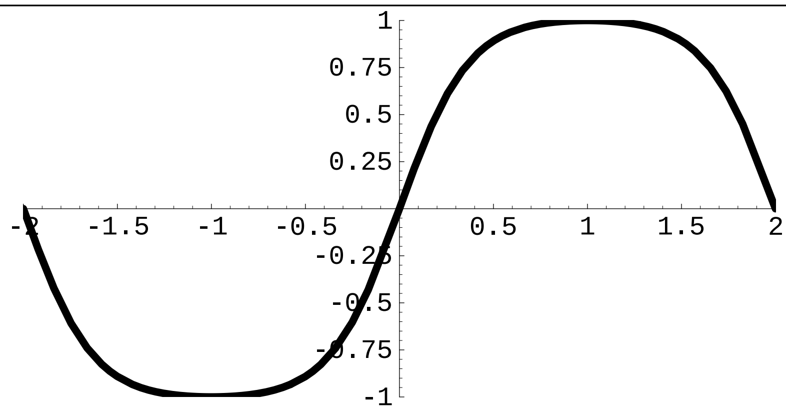
$$\mathrm{sn}(u+4K)=\mathrm{sn}(u), \mathrm{sn}(u+2iK')=\mathrm{sn}(u).$$

$$\mathrm{sn}(u+iK')=\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(u)}$$



$\left|\mathrm{sn}(uK+ivK')\right|$

v軸は２周期分



$\mathrm{sn}(uK)$

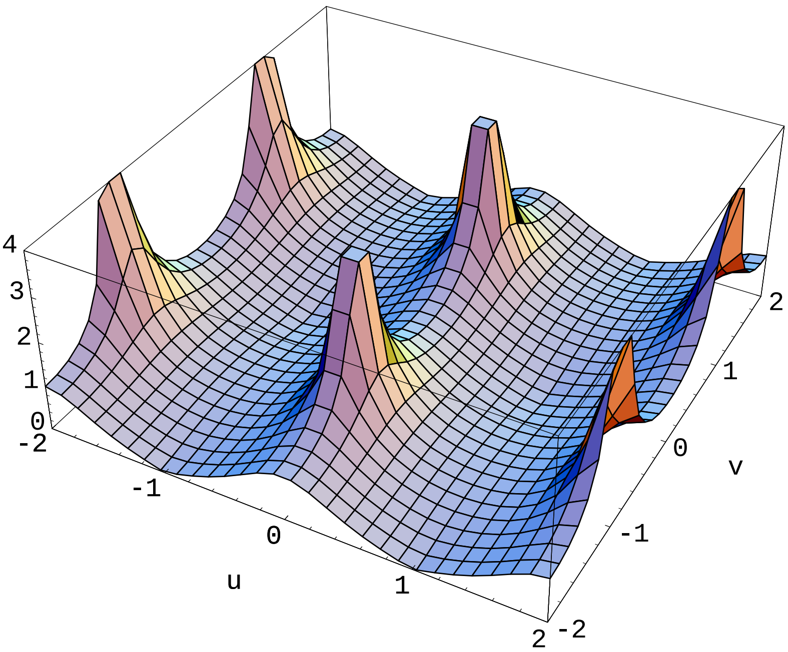
２重周期で，極以外の特異点を持たない$\Rightarrow$ 楕円関数.

cn の複素平面上でのふるまい：

２重周期：

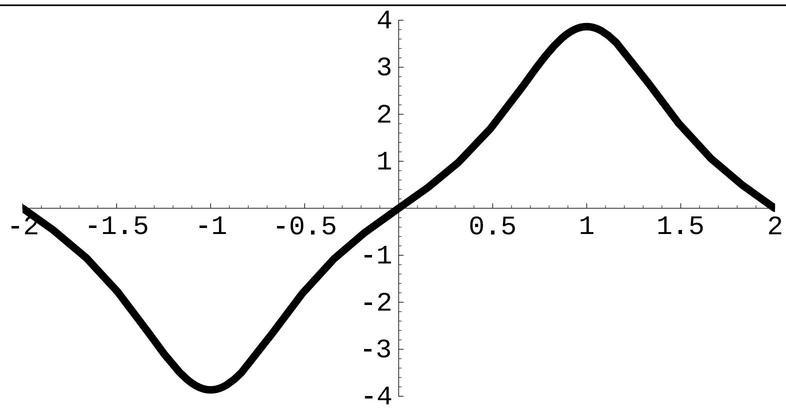
$$\mathrm{cn}(u+4K)=\mathrm{cn}(u),\mathrm{cn}(u+2K+2iK')=\mathrm{cn}(u).$$

$$\mathrm{cn}(u+iK')=\frac{-i\mathrm{dn(u)}}{k\mathrm{sn}(u)}$$



$|\mathrm{cn}(uK+ivK')|$

２周期分



$\mathrm{sn}(uK)/\mathrm{dn}(uK)$

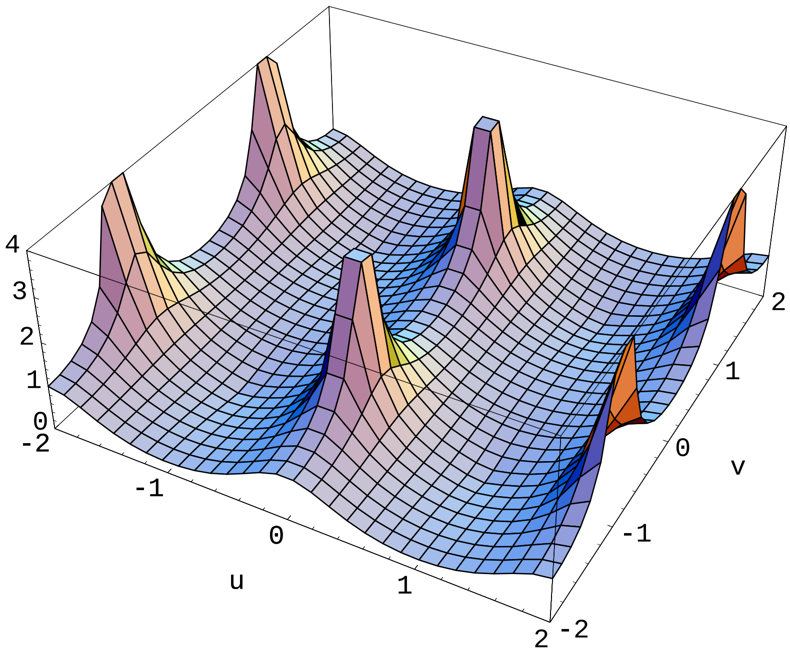
---

dn の複素平面上でのふるまい：

２重周期：

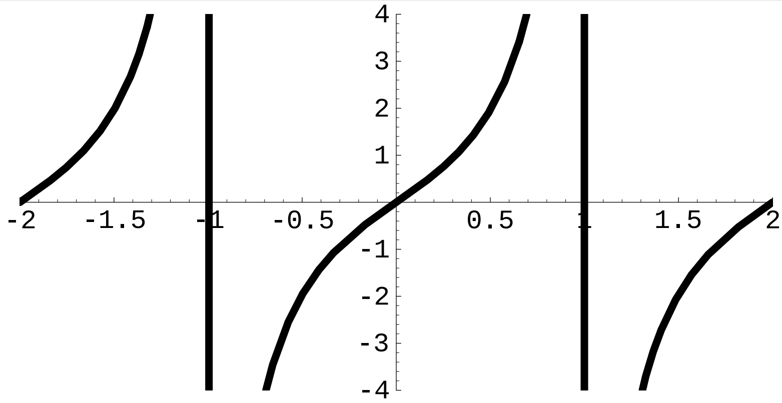
$$\mathrm{dn}(u+2K)=\mathrm{dn}(u), \mathrm{dn}(u+4iK')=\mathrm{dn}(u).$$

$$\mathrm{dn}(u+iK')=\frac{-i\mathrm{cn}(\mathrm{u})}{\mathrm{sn}(u)}$$



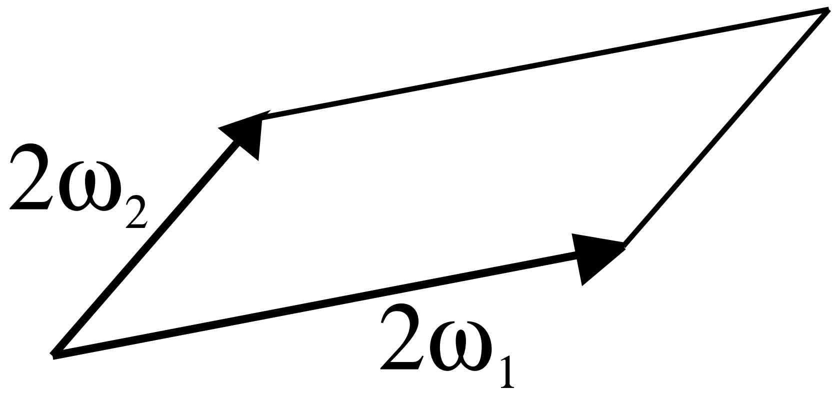
$|\mathrm{dn}(uK+ivK')|$

u 軸は２周期分



$\mathrm{sn}(uK)/\mathrm{cn}(uK)$

楕円関数（２重周期で特異点は極のみ）の一般論：
関係がある事のみ



基本周期平行四辺形　基本周期：$2\omega_1, 2\omega_2$

定理：周期平行四辺形内の０点の位数の和は，極の位数の和に等しい.

$$f(u) = a_n(u-u_0)^n + a_{n+1}(u-u_0)^{n+1} + \cdots$$

$$\Rightarrow f'(u)/f(u) = \frac{n}{(u-u_0)} + \cdots$$

$$f(u) = \frac{c_{-m}}{(u-u_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(u-u_0)^{m-1}} + \cdots$$

$$\Rightarrow f'(u)/f(u) = \frac{-m}{(u-u_0)} + \cdots$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'(u)du}{f(u)} = \sum_{\text{zero}} n - \sum_{\text{pole}} m$$

楕円関数の位数：

$$N = \sum_{\text{zero}} n = \sum_{\text{pole}} m$$

を，この楕円関数の位数と呼ぶ.

任意の複素数 α に対して，$f(u) - \alpha$ の極の位数は $f(u)$ の位数とかわらないから，

定理： 周期平行四辺形内の α 点の位数の和は，極の位数の和に等しい.（任意の値 α をちょうど位数回ずつとる）

定理： 周期が同じ２つの楕円関数の主要部が一致すれば，２つの楕円関数は定数の差を除いて等しい.

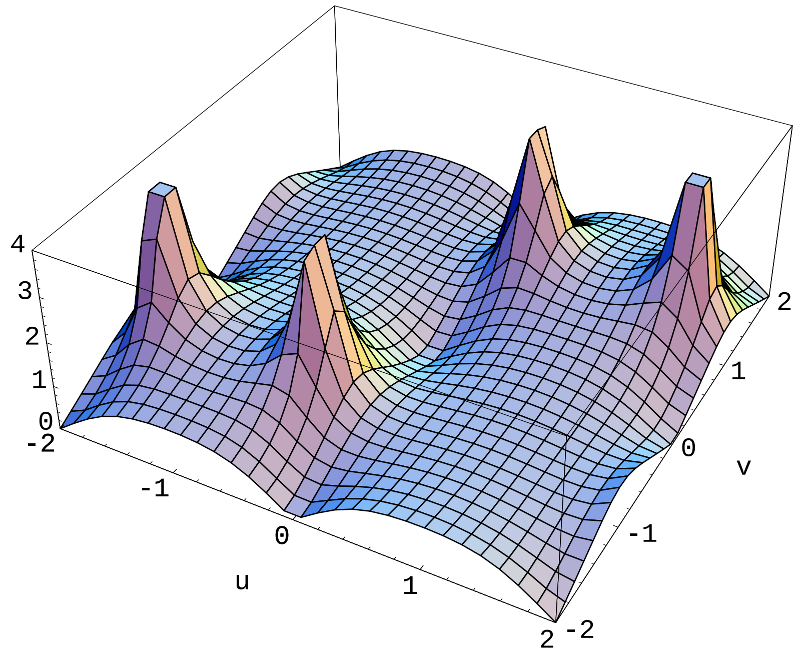
主要部：

$$f(u) = \frac{c_{-m}}{(u-u_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(u-u_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{u-u_0} + c_0 + \ldots$$

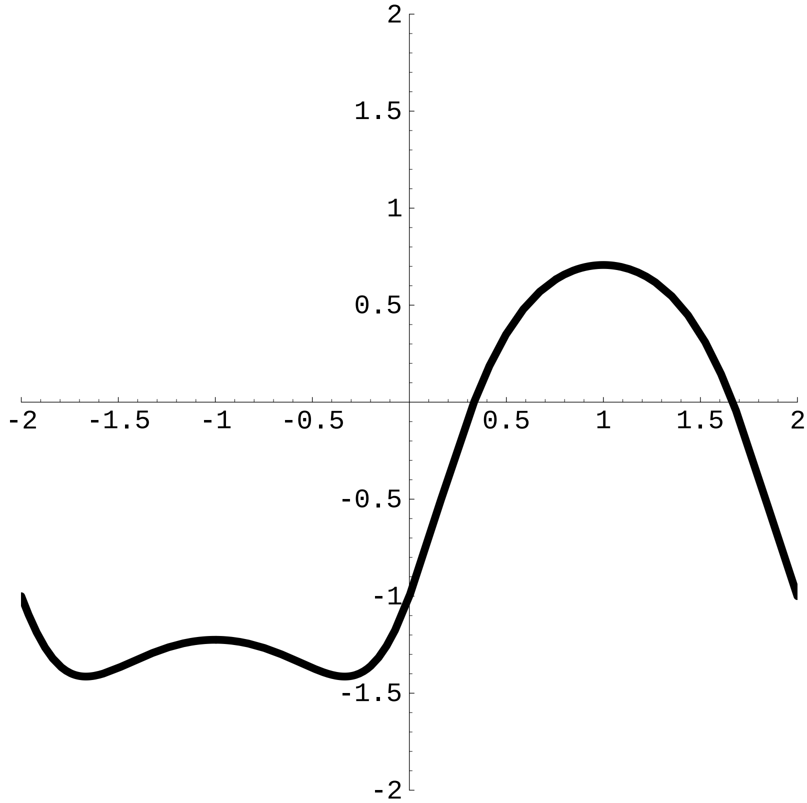
の c_0 以降を除いたもの.

なぜなら，$f(u) - g(u)$ は，周期平行四辺形内で有界であり，周期性によって全平面で有界だから，$f(u) - g(u) = \text{const.}$（全平面で有界な正則関数は定数）

複素平面上での$x^{(+)}(t) = \mathrm{sn}(t)/(1 - i\mathrm{cn}(t))$:



$|x^{(+)}(u)| = |\mathrm{sn}(t)/(1 - i\mathrm{cn})|$ 1周期分



$1/x^{(+)}(u + iK') = k\ \mathrm{sn}(u) - \mathrm{dn}(u)$

$x^{(+)}(t)$ は，実軸方向に丁度 $4K/3$ 離れた極を持ち，その留数は互いに逆符号.

$K/3 + iK'$，$5K/3 + iK'$，$-K/3 - iK'$，$-5K/3 - iK'$

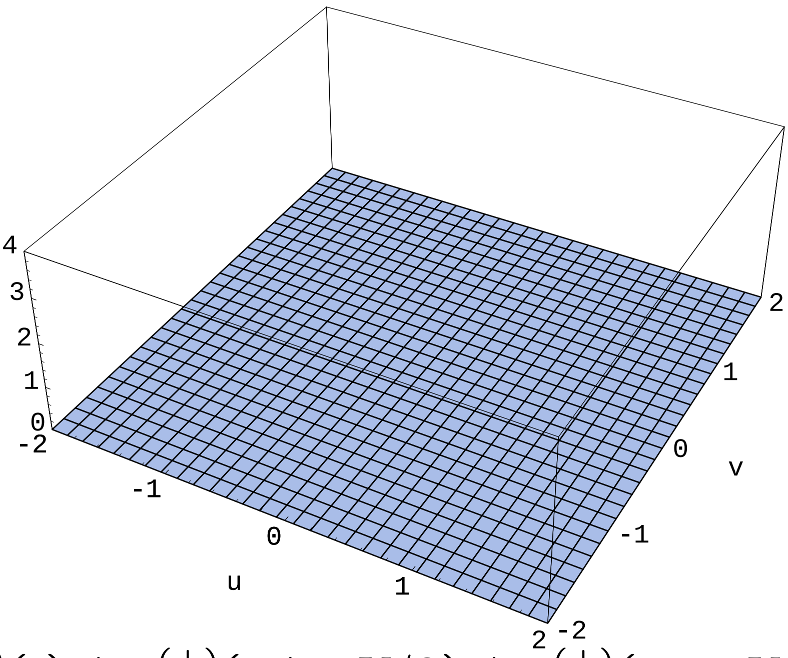
従って，

$$x^{(+)}(t) + x^{(+)}(t + 4K/3) + x^{(+)}(t - 4K/3)$$

の極の留数は互いに打ち消し合うので，これは定数.

$t = 0$ では，$x^{(+)}(0) = 0$，$x^{(+)}(4K/3) + x^{(+)}(-4K/3) = 0$ なので，結局，

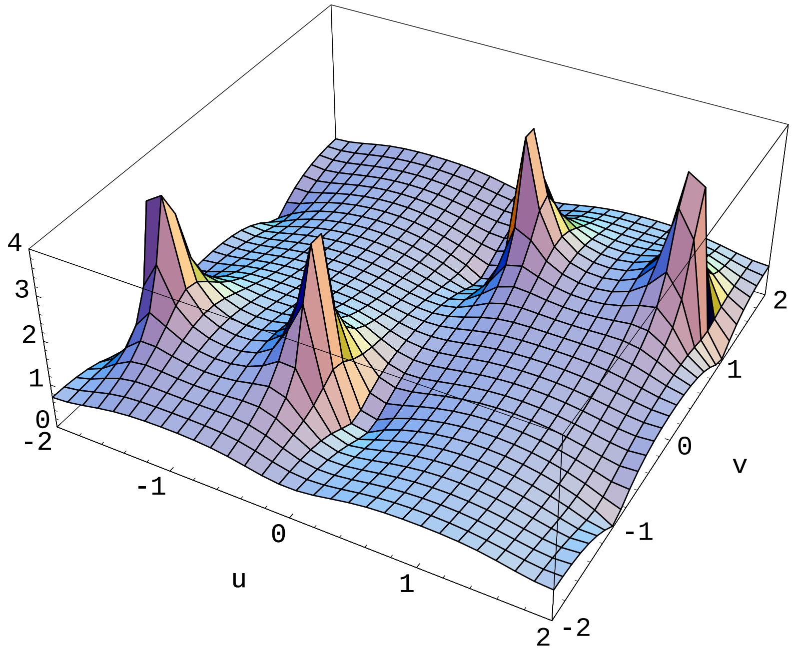
$$x^{(+)}(t) + x^{(+)}(t + 4K/3) + x^{(+)}(t - 4K/3) = 0$$



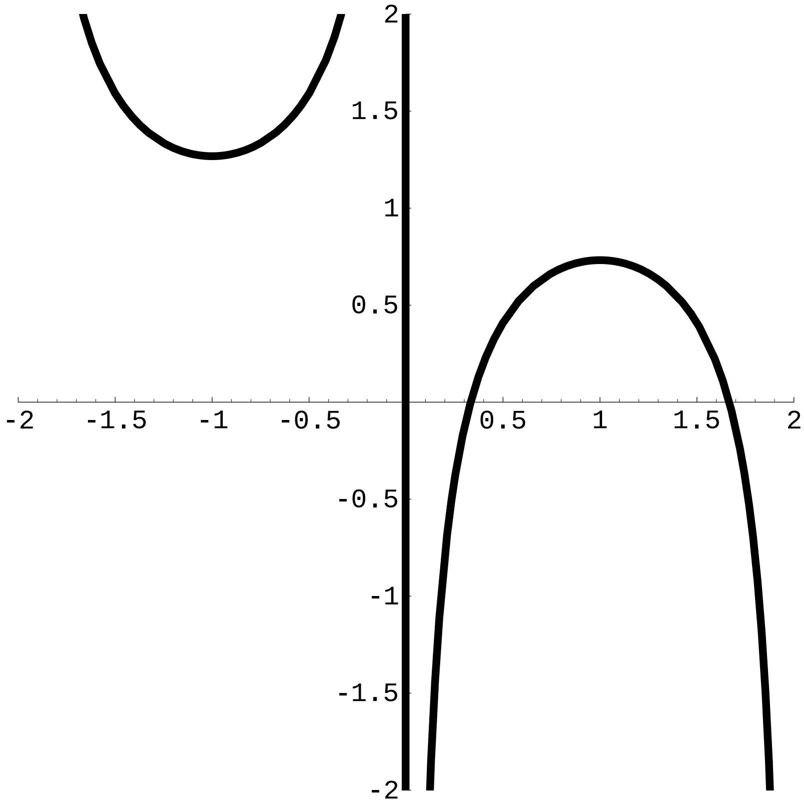
$|x^{(+)}(t) + x^{(+)}(t + 4K/3) + x^{(+)}(t - 4K/3)|$

$\Rightarrow$ 重心の保存

複素平面上での $1/(1-i\mathrm{cn}(t))$:



$|1/(1-i\mathrm{cn}(t))|$ ２周期分



$1-i\mathrm{cn}(u+iK')=(k\ \mathrm{sn}(u)-\mathrm{dn}(u))/(k\ \mathrm{sn}(u))$

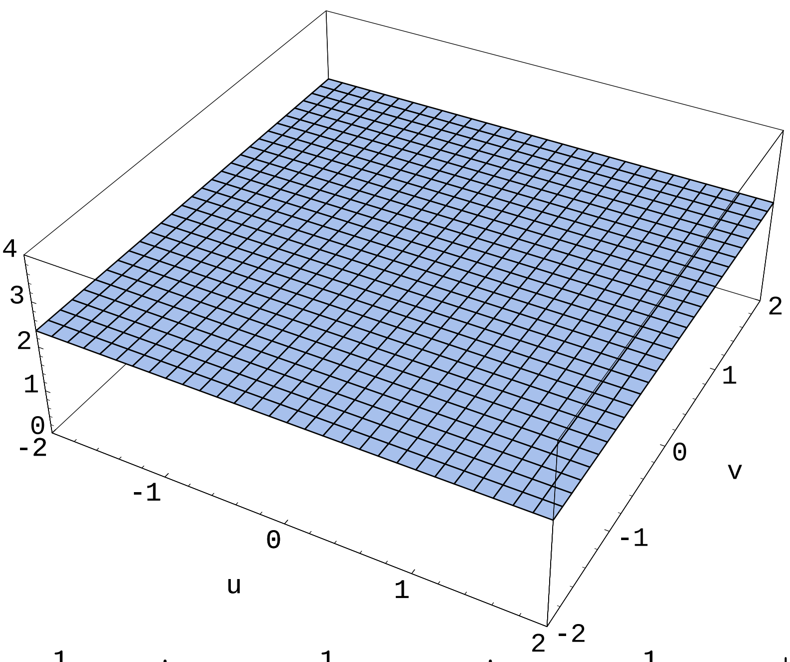
$1/(1-i\mathrm{cn}(t))$ は，実軸方向に丁度 $4K/3$ 離れた極を持ち，その留数は互いに逆符号.

$K/3+iK'$, $5K/3+iK'$, $-K/3-iK'$, $-5K/3-iK'$

従って,

$$\frac{1}{1-i\mathrm{cn}(t)}+\frac{1}{1-i\mathrm{cn}(t+4K/3)}+\frac{1}{1-i\mathrm{cn}(t-4K/3)}$$

の極の留数は互いに打ち消し合うので，これは定数.



$$\left|\frac{1}{1-i\mathrm{cn}(t)}+\frac{1}{1-i\mathrm{cn}(t+4K/3)}+\frac{1}{1-i\mathrm{cn}(t-4K/3)}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \mathbf{x}_i^2\right)+i\sum_i \mathbf{x}_i\times\mathbf{v}_i=\frac{d}{dt}\sum\frac{1}{1-i\mathrm{cn}(t)}=0.$$

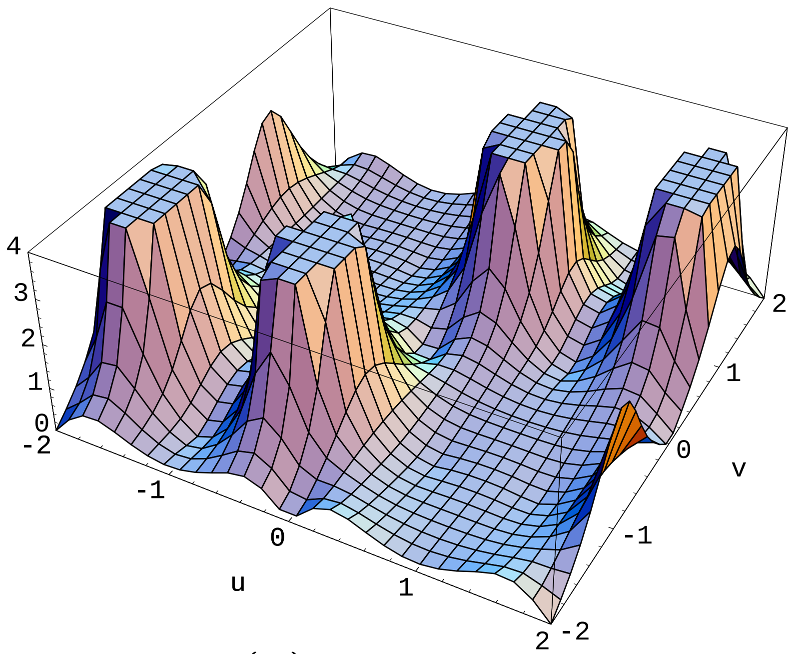
慣性モーメントの保存と角運動量ゼロ.

運動方程式：

加速度

$$a^{(+)}(t) = \frac{d^2 x^{(+)}(t)}{dt^2}$$

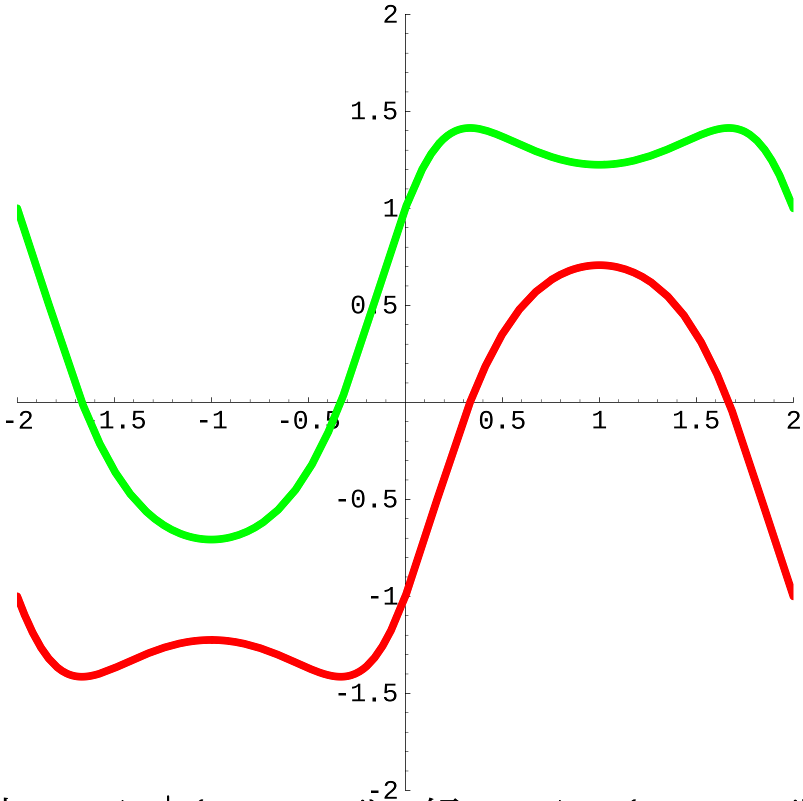
は，３次の極を持つ.



$|a^{(+)}(uK + ivK')|$

このような極を持つ力を構成できるか？

一つのヒントは,



赤は $1/x^{+}(u+iK')$, 緑は $1/x^{-}(u+iK')$

こうなる理由は，レムニスケートの定義

$$\left|z^2-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

から,

$$\left((x^{(+)})^2-\frac{1}{2}\right)\left((x^{(-)})^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

従って，もし,

$$x^{(+)}=\frac{1}{\varepsilon}+\cdots$$

$$\Rightarrow (x^{(-)})^2=\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon^2}{8}+O(\varepsilon^3)$$

$$\Rightarrow x^{(-)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{16}+O(\varepsilon^3)\right)$$

つまり… ?

$$
\begin{aligned}
& x^{(-)}(u+4K/3+iK') \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}(u-K/3)^2 \\
& + \frac{3^{1/4}}{8\sqrt{2}}(u-K/3)^3 + \frac{9}{128\sqrt{2}}(u-K/3)^4 \\
& + \frac{3^{3/4}}{64\sqrt{2}}(u-K/3)^5 + \cdots ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& x^{(-)}(u+iK') \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}(u-K/3)^2 \\
& - \frac{3^{1/4}}{8\sqrt{2}}(u-K/3)^3 + \frac{9}{128\sqrt{2}}(u-K/3)^4 \\
& - \frac{3^{3/4}}{64\sqrt{2}}(u-K/3)^5 + \cdots .
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

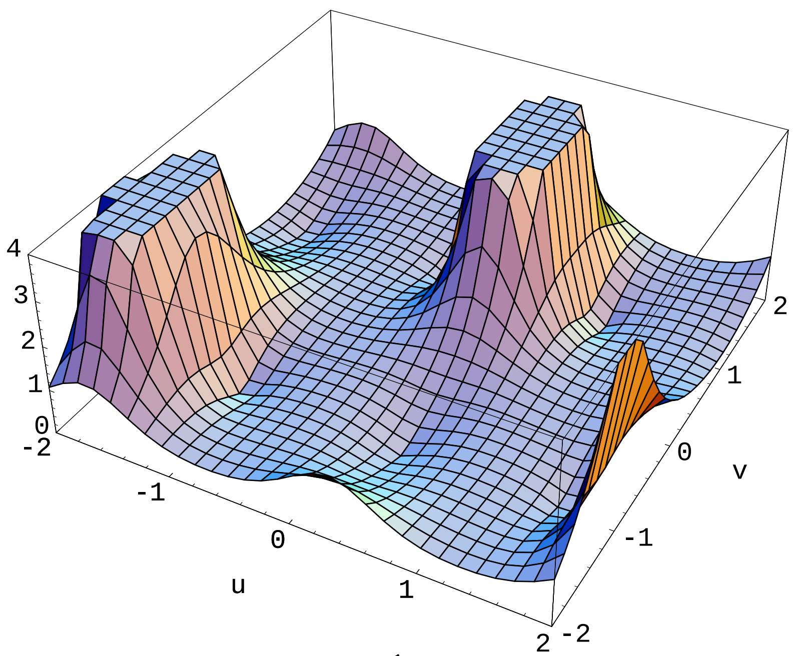
$$
\begin{aligned}
& x^{(-)}(u+4K/3+iK') - x^{(-)}(u+iK') \\
= \; & \frac{3^{1/4}}{4\sqrt{2}}(u-K/3)^3 + \frac{3^{3/4}}{32\sqrt{2}}(u-K/3)^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x^{(-)}(t+4K/3)-x^{(-)}(t)}$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3^{1/4}}\frac{1}{(t-\alpha_2)^3}-\frac{3^{1/4}}{\sqrt{2}}\frac{1}{(t-\alpha_2)}+\cdots,$$
$$\alpha_2=\frac{K}{3}+iK'$$

となって，３次の極が出てくる.（半分だけ）

しかし１次の項が邪魔...



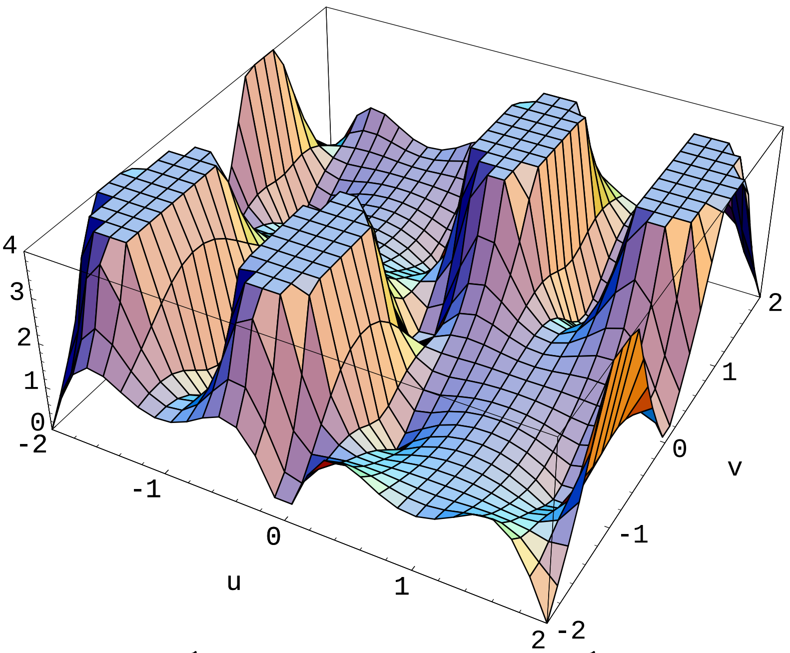
$\left|\frac{1}{x^{(-)}(t+4K/3)-x^{(-)}(t)}\right|$

従って,

$$\frac{1}{x^{(-)}(t+4K/3)-x^{(-)}(t)}$$

を$4K/3$だけずらして重ねると,

$$\frac{1}{x^{(-)}(t+4K/3)-x^{(-)}(t)}-\frac{1}{x^{(-)}(t)-x^{(-)}(t-4K/3)}$$



$$\left|\frac{1}{x^{(-)}(t+4K/3)-x^{(-)}(t)}-\frac{1}{x^{(-)}(t)-x^{(-)}(t-4K/3)}\right|$$

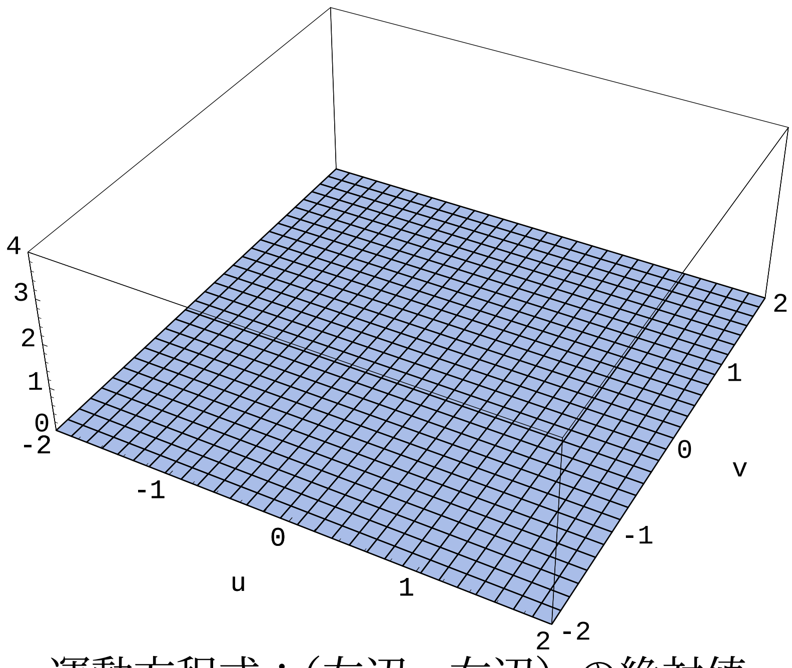
となって，正しい位置に３次の極が全て現れた.

しかし，邪魔な１次の項が残る???

残った１次の項は，ちょうど$x^{(+)}(t)$に比例して，

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x^{(+)}(t)}{dt^2}\\ = \ &\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\triangle x^{(-)}(t)}-\frac{1}{\triangle x^{(-)}(t-\frac{4K}{3})}\right\}\\ &+\frac{\sqrt{3}}{4}x^{(+)}(t).\end{aligned}$$

$$\triangle x^{(-)}(t)=x^{(-)}(t+4K/3)-x^{(-)}(t).$$



運動方程式：（左辺ー右辺）の絶対値

ベクトルに書き直すと

$$\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}_{\mathsf{attr}} + \mathbf{F}_{\mathsf{rep}}$$

$$\mathbf{F}_{\mathsf{attr}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathbf{x}(t+4K/3)-\mathbf{x}(t)}{(\mathbf{x}(t+4K/3)-\mathbf{x}(t))^2} + \frac{\mathbf{x}(t-4K/3)-\mathbf{x}(t)}{(\mathbf{x}(t-4K/3)-\mathbf{x}(t))^2}\right\},$$

$$\mathbf{F}_{\mathsf{rep1}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{x}(t) \text{ or}$$

$$\mathbf{F}_{\mathsf{rep2}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}\left\{\left(\mathbf{x}(t+\frac{4K}{3})-\mathbf{x}(t)\right) + \left(\mathbf{x}(t-\frac{4K}{3})-\mathbf{x}(t)\right)\right\}$$

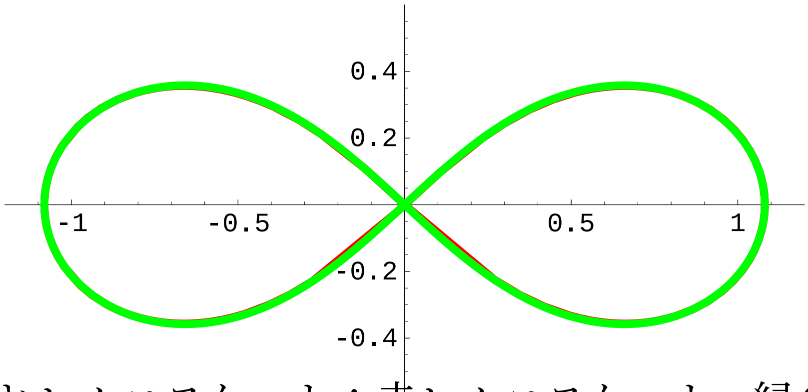
対応するポテンシャルエネルギーは,

$$U = \sum_{i<j}\frac{1}{2}\ln r_{ij} - \sum_i \frac{\sqrt{3}}{8}\mathbf{x}_i^2 \text{ or}$$

$$V = \sum_{i<j}\left\{\frac{1}{2}\ln r_{ij} - \frac{\sqrt{3}}{24}r_{ij}^2\right\}$$

反発力は，１次の極が残った事に由来する.

Simóの解との比較：

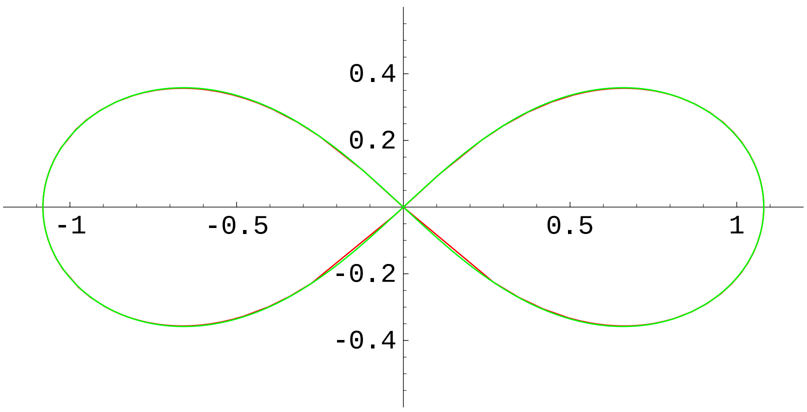


Simóの解とレムニスケート：赤レムニスケート，緑Simóの解.
レムニスケートはxの最大値をSimóの解の x_{max} に合わせて，
上下方向にk^2だけつぶしたもの.

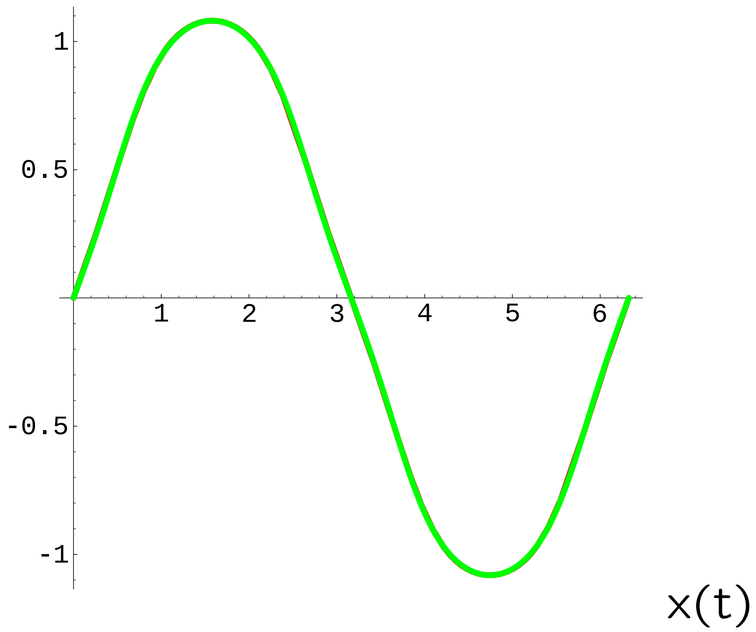
$$x_{\mathsf{max}}\left(x(\tau)\mathbf{e}_x + k^2 y(\tau)\mathbf{e}_y\right) = x_{\mathsf{max}}\frac{\mathsf{sn}(\tau)}{1+\mathsf{cn}^2(\tau)}\left(\mathbf{e}_x + k^2\mathsf{cn}(\tau)\mathbf{e}_y\right),$$

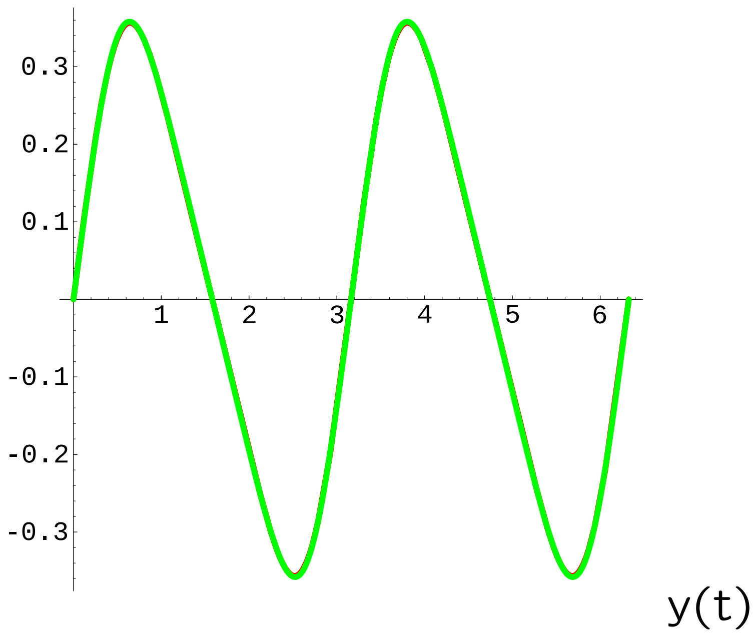
$$k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \tau = \frac{4K}{T}t, T = 6.32591398...$$

細い線で書いても，

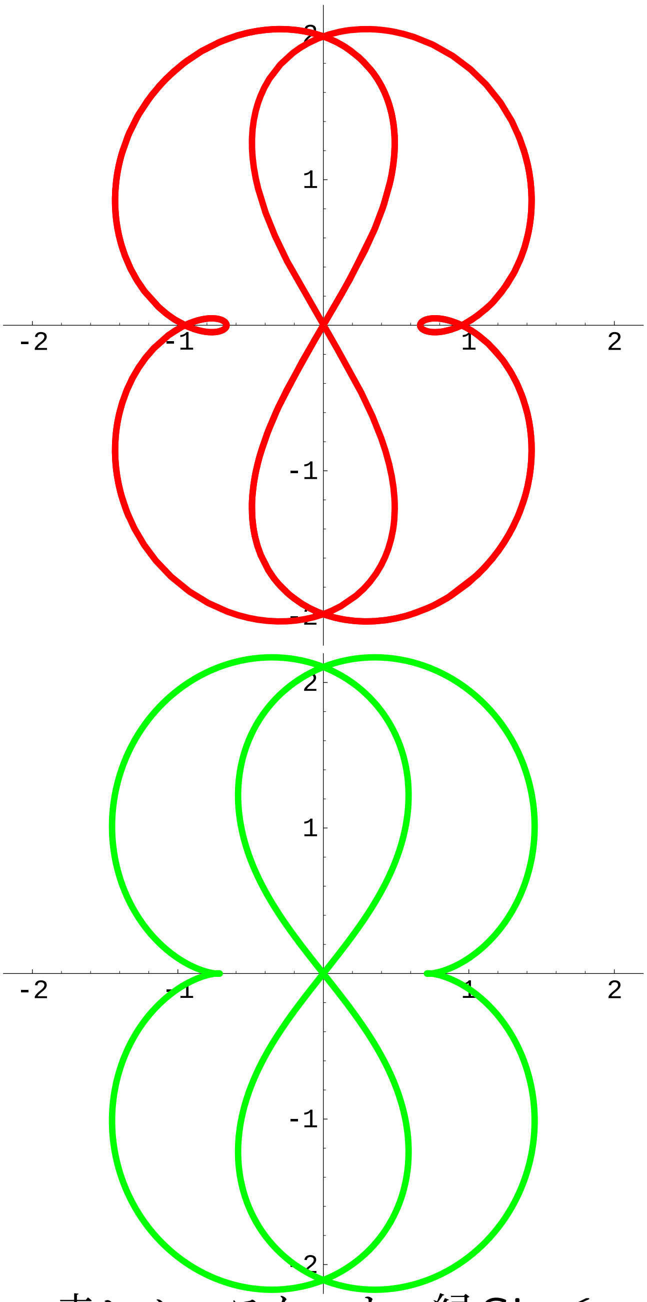


時間依存性：





しかし，加速度は…



赤レムニスケート，緑Simó

このように，加速度をみると明らかな違いがあるが，

$$x_{\mathsf{max}}\left(x(\tau)\mathbf{e}_x + k^2 y(\tau)\mathbf{e}_y\right) = x_{\mathsf{max}}\frac{\mathsf{sn}(\tau)}{1+\mathsf{cn}^2(\tau)}\left(\mathbf{e}_x + k^2\mathsf{cn}(\tau)\mathbf{e}_y\right)$$

とSimóの解は，実空間では，数値的に非常に良く一致している．

これは一体，何を意味しているんだろう？