３体８の字解の軌道の形と時間発展

藤原俊朗
with
福田宏，尾崎浩司，Richard Montgomery

2003 年 11 月 13 日　数理解析研

C. Moore[1], A. Chenciner & R. Montgomery[2], C. Simó[3, 4] らによって発見された，３体８の字解の軌道の形と時間発展について調べたことを報告します．３体８の字解は，３体問題の一つの解で，等質量の３体が８の字の形をした一つの軌道の上を互いに追いかけっこをする解です．Simó は，この解を "３体コレオグラフィ" と名付けました．

Chenciner と Montgomery の論文 [2] の最後に，彼等がどうやってこの解を見つけたかを書いていて，その中に Chenciner が Gravitation Ltd. というシミュレーターを使ったというくだりがあります．実は私も，遥か昔，初めて Macintosh を買った頃に，このシミュレーターでかなりの時間をかけて８の字解を見つけようとした事があります．そんなこともあって，彼等の論文を知った時には，本当に驚きました．

その時点で知られていた事は，８の字解の存在証明 [2] および，その数値解 [1, 3, 4] でした．我々は，もっと詳しく，その形，その時間発展の解析的な理解を得ようと思いました．

まず注目したのが角運動量です．８の字解は，その形から角運動量がゼロです．FFO は次の事を示しました．

1　３接線定理 [6]

一般に角運動量がゼロの３体運動では，各質点から引いた軌道の接線が各瞬間に１点で交わる［３接線定理］．図 1．

３接線定理は，軌道の形についての必要条件を与えます．たとえば，軌道の形として（最も単純な）4 次の多項式を仮定すると，３接線定理から，それは Bernoulli のレムニスケート $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ を縦横適当に伸縮したものしかない事が示されます．

次に，レムニスケートを適当にパラメトライズして，この上を動く３体コレオグラフィが得られるかどうかを調べました．FFO は次の結果を得ました．

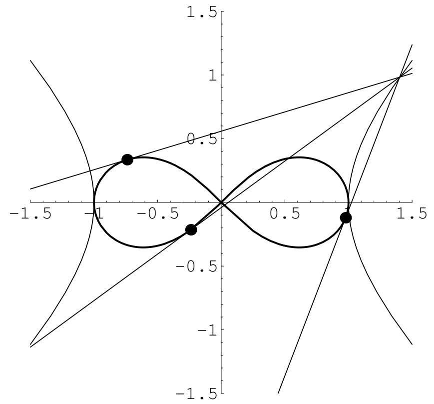

図１　３接線は一点で交わる

2　レムニスケート上のコレオグラフィ [6]

Jacobi の楕円関数 sn, cn でパラメトライズされたレムニスケート

$$x(t) = \frac{\mathrm{sn}(t)}{1+\mathrm{cn}^2(t)},\ y(t) = \frac{\mathrm{sn}(t)\mathrm{cn}(t)}{1+\mathrm{cn}^2(t)}$$

で，母数を $k^2 = (2+\sqrt{3})/4$ としたものは，ポテンシャルエネルギー

$$V = \sum_{i<j} \left(\frac{1}{2} \ln r_{ij} - \frac{\sqrt{3}}{24} r_{ij}^2 \right)$$

の下での運動方程式を満たす．この運動では，通常の保存量以外に原点周りの慣性モーメント $I = \sum_i (x_i^2 + y_i^2)$ が一定値をとります．

このポテンシャルの第２項は斥力を与えます．運動からポテンシャルは一意的には定まらないので，なんとか工夫して，斥力項がないポテンシャルを見つけられないものでしょうか？

すくなくとも，斉次ポテンシャル $\alpha^{-1} r^\alpha$ の中には見つけられません．というのは，Chenciner の提出した問題，“$I = const.$ の８の字解は，斉次ポテンシャルの中では $\alpha = -2$ でしか実現しない事を示せ．”[5] を，FFO が肯定的に証明したからです．（数値的には，$\alpha = -2$ の８の字解もレムニスケートではないようです．）

3　慣性モーメントの非一定性 [7]

ポテンシャルエネルギー $V_\alpha = \alpha^{-1} \sum_{i<j} r_{ij}^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$，あるいは $V_0 = \sum_{i<j} \log r_{ij}$ の下では，慣性モーメントが一定な３体８の字解は，$\alpha = -2$ の場合に限って存在する．

4　左右の葉の凸性 [8]

Chenciner と Montgomery は，８の字解の左右の葉は “Star Shape”（原点から無限遠に引いた半直線が，一回しか弧と交わらない）であることを示しました [2].

Chenciner は，“問題は原点付近で，原点から遠いところの証明は難しくない” [5] と述べていました．しかし，私が調べてみると，全く逆に，原点近くはやさしそうなのに対し，原点からはなれたところの証明は見当も付かないのでした．図 2．両方のアイデアをうまく融合させる事ができれば，証明が完成するはずです．FM は以下の事を証明しました．

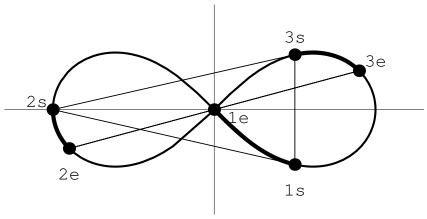

図 2　８の字の分割：原点に近い弧と遠い弧

ポテンシャルエネルギー $V = \sum_{i<j} f(r_{ij})$ が引力 $df/dr > 0$ で，$r^{-1}df/dr$ が r の (strictly) 単調減少関数であれば，８の字解の左右の葉は，それぞれ凸である．

証明には，“Star Shapedness” と “３接線定理” を用います．

Newton のポテンシャル $-1/r$ は，ここで述べているポテンシャルに含まれます．斉次ポテンシャル $\alpha^{-1}r^{\alpha}$ では，$\alpha < 2$ であれば，ここに述べた性質を満たします．この限界 $\alpha < 2$ が，Moore が見つけた８の字解の存在限界 [1] と一致するのは，興味深い事です．

我々より前に，T. Kapela と P. Zgliczyński は Newton ポテンシャルの下での８の字解の “凸性” を interval arithmetic を使って証明しています [9].

5　未解決の問題

5.1　Unicity

ポテンシャルを定めた時，８の字解は，スケール，回転を除いてユニークでしょうか？数値的には，ユニークであることはほぼ間違いありません．Kapela と Zgliczyński は Newton ポテンシャルの下での８の字解の “local unicity” を interval arithmetic を使って証明しています [9].

5.2　軌道の形

８の字解の軌道 $F(x, y) = 0$ は，多項式で表されるでしょうか？ Simó は，Newton 重力の下での８の字解が，4, 6, 8 次の多項式では表せない事を数値的に示しています [4].

レムニスケートは 4 次の多項式ですが，6 次，8 次の多項式で表される軌道上のコレオグラフィを見つける事ができるでしょうか？

5.3 解析解

斉次ポテンシャルの下での，多体コレオグラフィの解析解を見つける事ができるでしょうか？

私はそれを見つけたいと思います．どなたか，もし見つけたら急いで論文を書き，その後で結構ですから私に教えて下さい．

参考文献

[1] Moore C 1993 Braids in Classical Dynamics *Phys. Rev. Lett* **70** 3675–3679

[2] Chenciner A and Montgomery R 2000 A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses *Annals of Mathematics* **152** 881–901

[3] Simó C 2001 Periodic orbits of planer N-body problem with equal masses and all bodies on the same path *Proceed. 3rd European Cong. of Math., Progress in Math.* **201** (Basel: Birkäuser) pp 101–115

[4] Simó C 2002 Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem *Celestial mechanics: Dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday. Contemporary Mathematics* **292** (Providence, R.I.: American Mathematical Society) pp 209–228

[5] Chenciner A 2002 Some facts and more questions about the “Eight” Proc. Conf. on Nonlinear functional analysis (Taiyuan) (Singapore: World Scientific)

[6] Fujiwara T, Fukuda H and Ozaki H 2003 Choreographic three bodies on the lemniscate *J. Phys. A* **36** 1–10

[7] Fujiwara T, Fukuda H and Ozaki H 2003 Evolution of the Moment of Inertia of Three-Body Figure-Eight Choreography *J. Phys. A* **36** 10537-10549

[8] Fujiwara T and Montgomery R 2003 Convexity in the Figure Eight Solution to the Three-Body Problem *http://arxiv.org/abs/math.DS/0308252*

[9] Kapela T and Zgliczyński P 2003 The existence of simple choreographies for the N-body problem — a computer-assisted proof, *Nonlinearity* **16** 1899–1918.