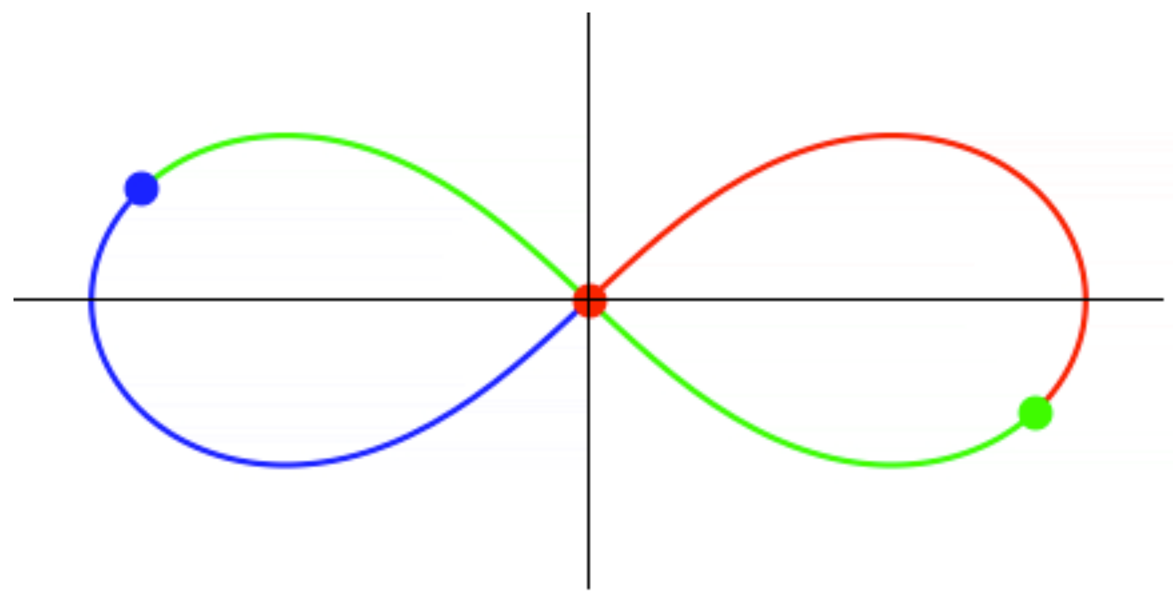
複素時間平面上の三体8の字解

藤原俊朗，福田宏，尾崎浩司，山田道夫

天体力学N体力学研究会

2015/12/24 千葉

3体8の字解



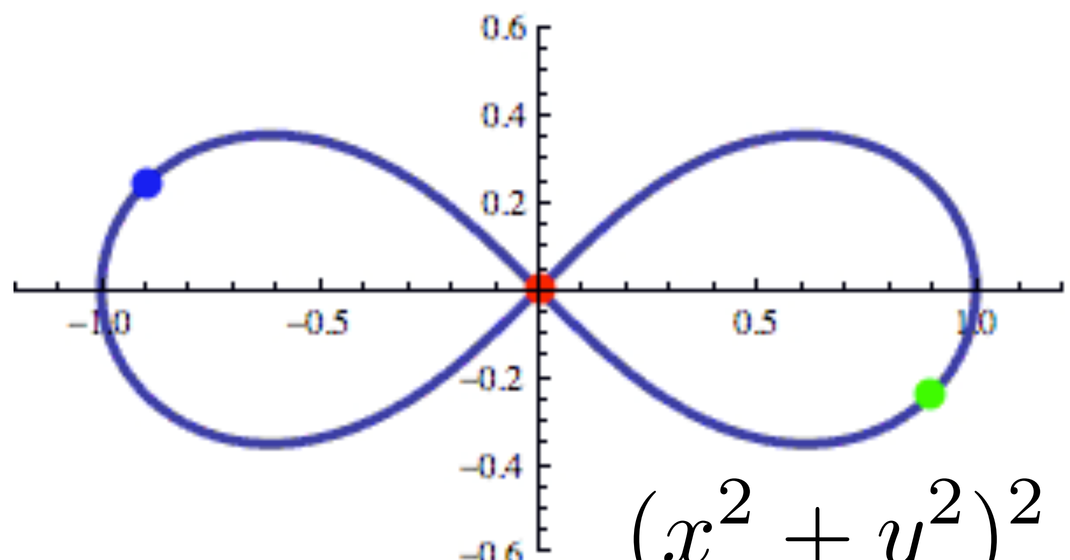
C. Moore 1993,
A. Chenciner, R. Montgomery 2000

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t), \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}(t + T/3), \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}(t + 2T/3).$$

$$H = \frac{1}{2}\sum |\dot{\mathbf{q}}_k|^2 - \frac{1}{\alpha}\sum \frac{1}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^\alpha}.$$

$$\sum \mathbf{q}_k = 0,\ \sum \mathbf{q}_k \times \dot{\mathbf{q}}_k = 0.$$

Lemniscate上の三体8の字解



$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$$

T. Fujiwara, H. Fukuda, H. Ozaki 2003

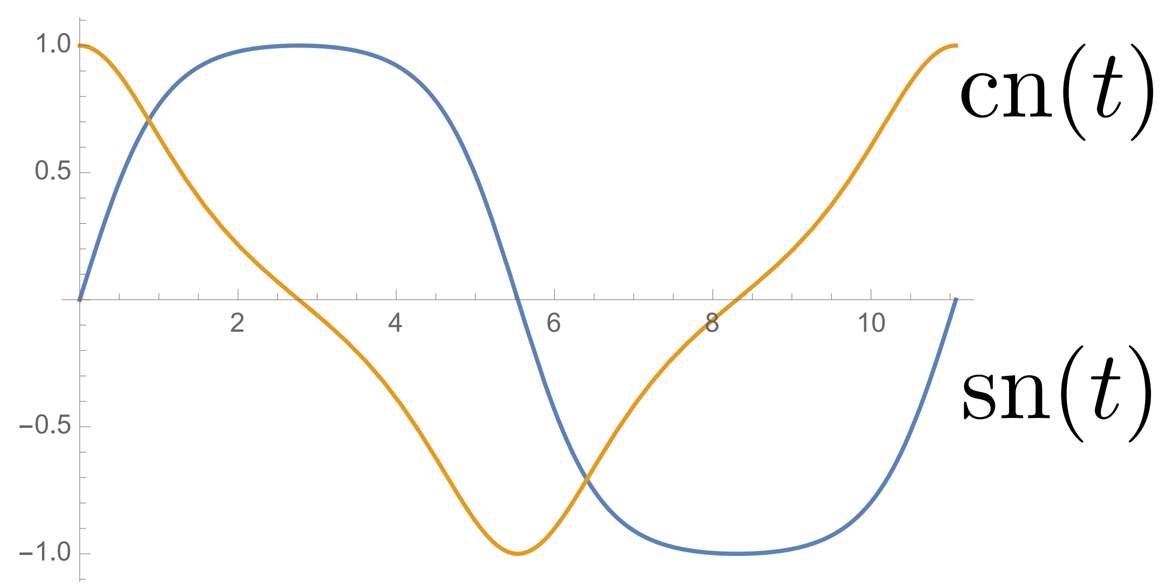
$$H = \frac{1}{2}\sum|\mathbf{q}_k|^2 + \frac{1}{2}\sum \ln|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j| - \frac{\sqrt{3}}{24}\sum|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2$$

Lemniscate上の3体8の字解

$$\mathbf{q} = (x, y) = \frac{1}{1 + \mathrm{cn}^2(t)} \left(\mathrm{sn}(t), \mathrm{sn}(t)\mathrm{cn}(t)\right)$$

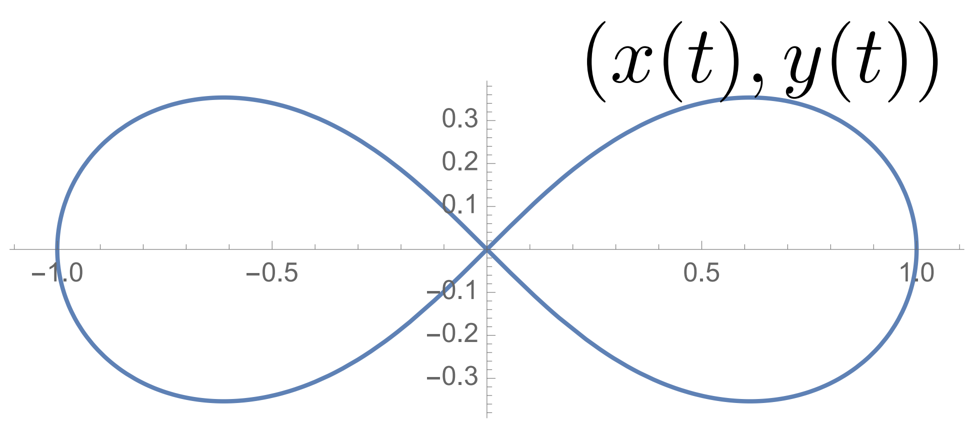
$$\mathrm{sn}^{-1}(t) = \int_0^t \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, \mathrm{sn}^2(t) + \mathrm{cn}^2(t) = 1$$

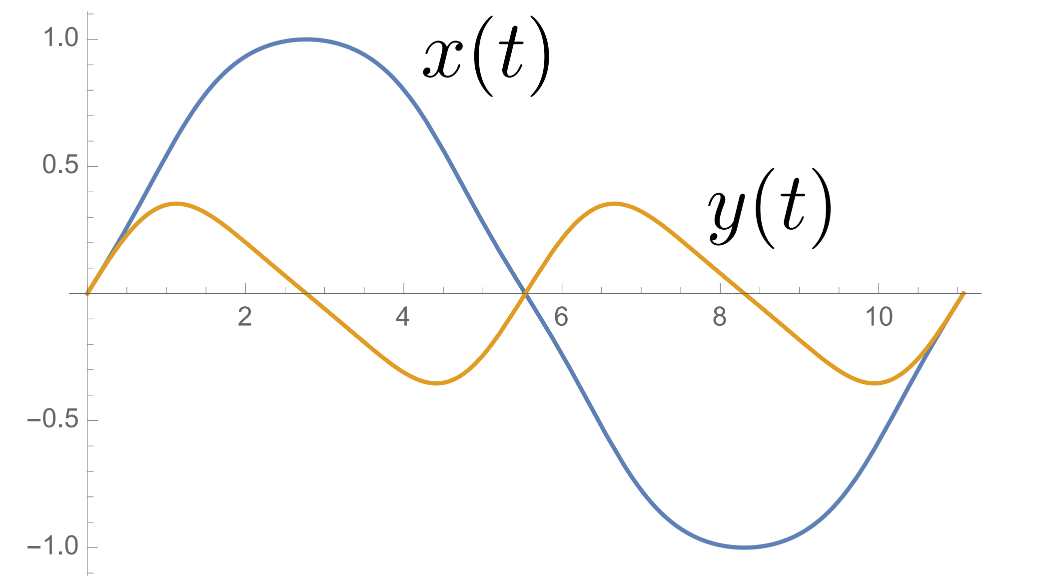
$$T = 4K,\ \ K = \mathrm{sn}^{-1}(1), k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = 0.93301\ldots$$

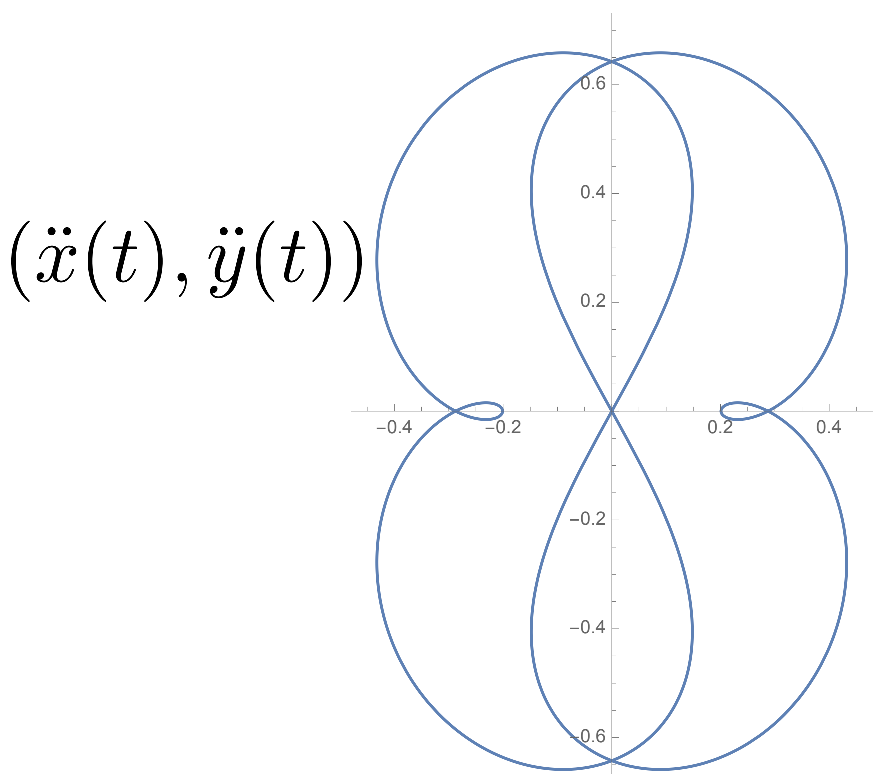


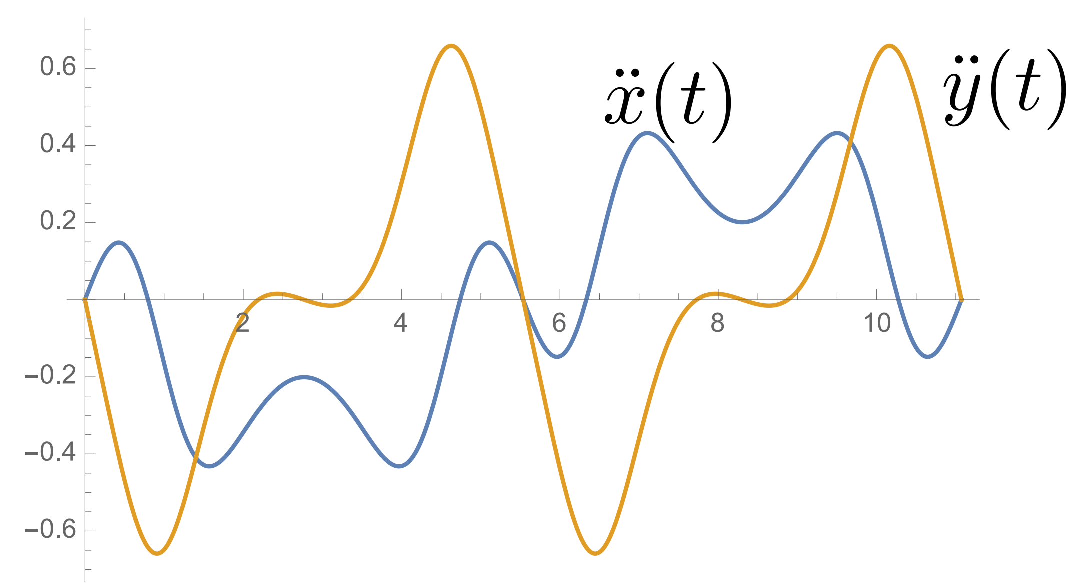
Lemniscate上の3体8の字解

$$\mathbf{q} = (x, y) = \frac{1}{1 + \mathrm{cn}^2(t)} \left(\mathrm{sn}(t), \mathrm{sn}(t)\mathrm{cn}(t)\right)$$







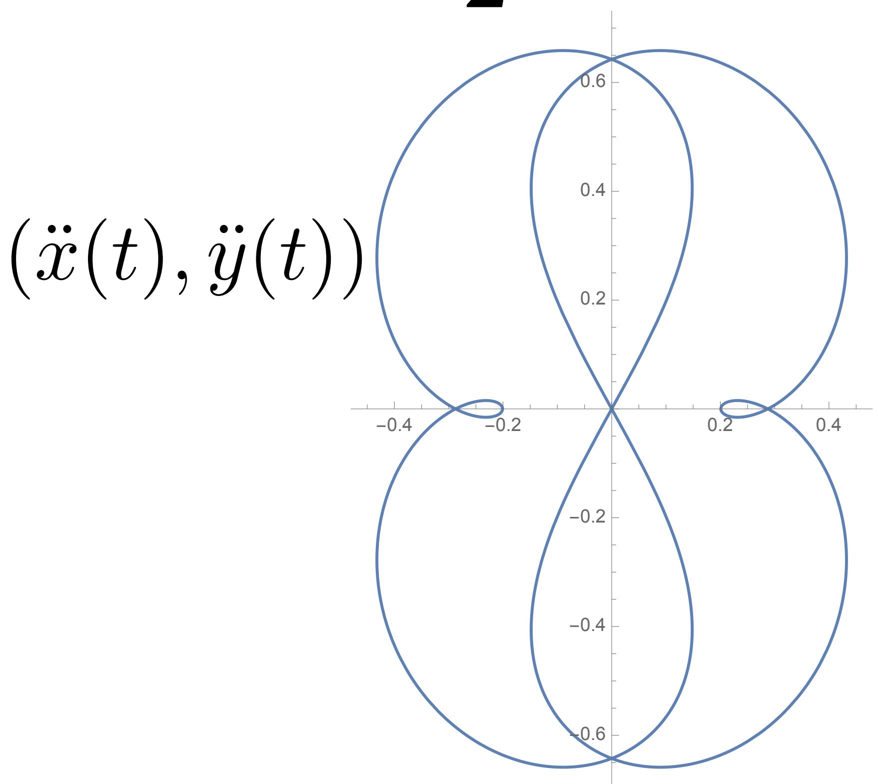


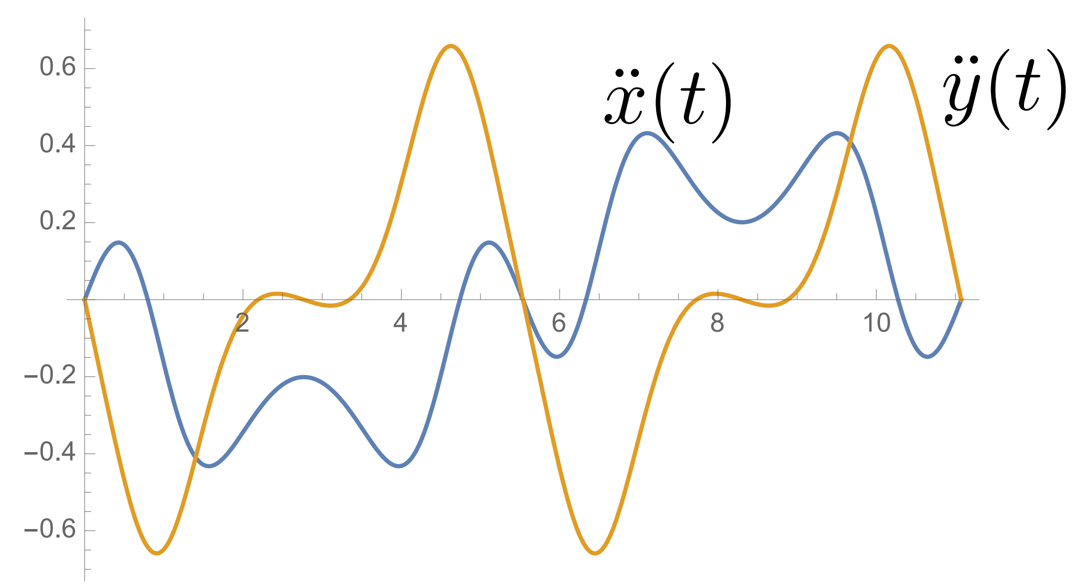
Lemniscate上の3体8の字解

$$\mathbf{q} = (x, y) = \frac{1}{1 + \mathrm{cn}^2(t)} (\mathrm{sn}(t), \mathrm{sn}(t)\mathrm{cn}(t))$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_k(t) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_k}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum \ln |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j| - \frac{\sqrt{3}}{24} \sum |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2$$



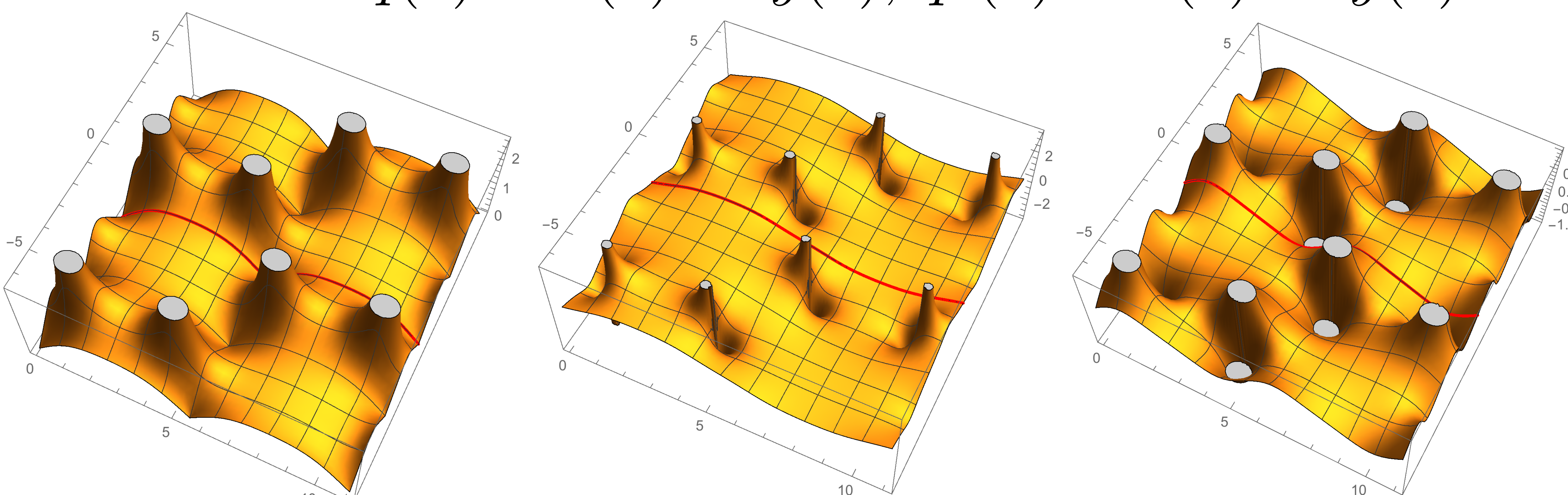


複素時間平面上のLemniscate解

$$t \in \mathbb{R} \to z = t + i\tau \in \mathbb{C}$$

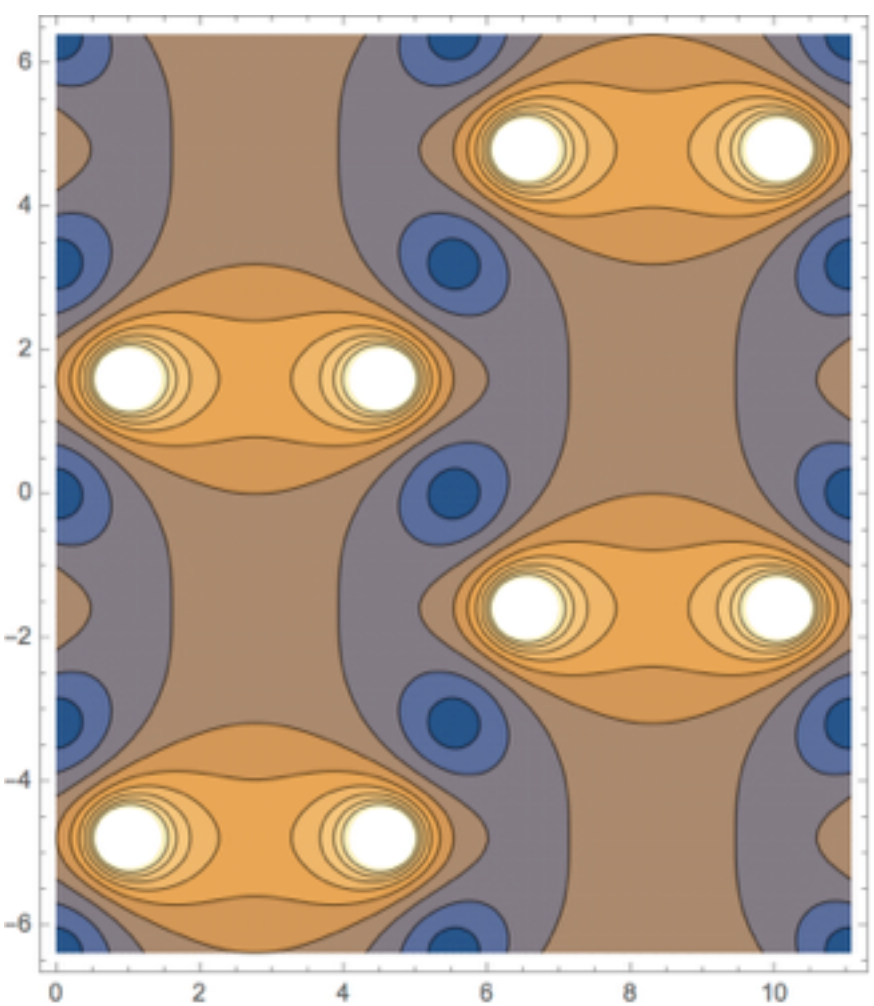
$$x(t), y(t) \in \mathbb{R} \to x(z), y(z) \in \mathbb{C}$$

$$\leftrightarrow q(z) = x(z) + iy(z),\ q^\dagger(z) = x(z) - iy(z) \in \mathbb{C}$$

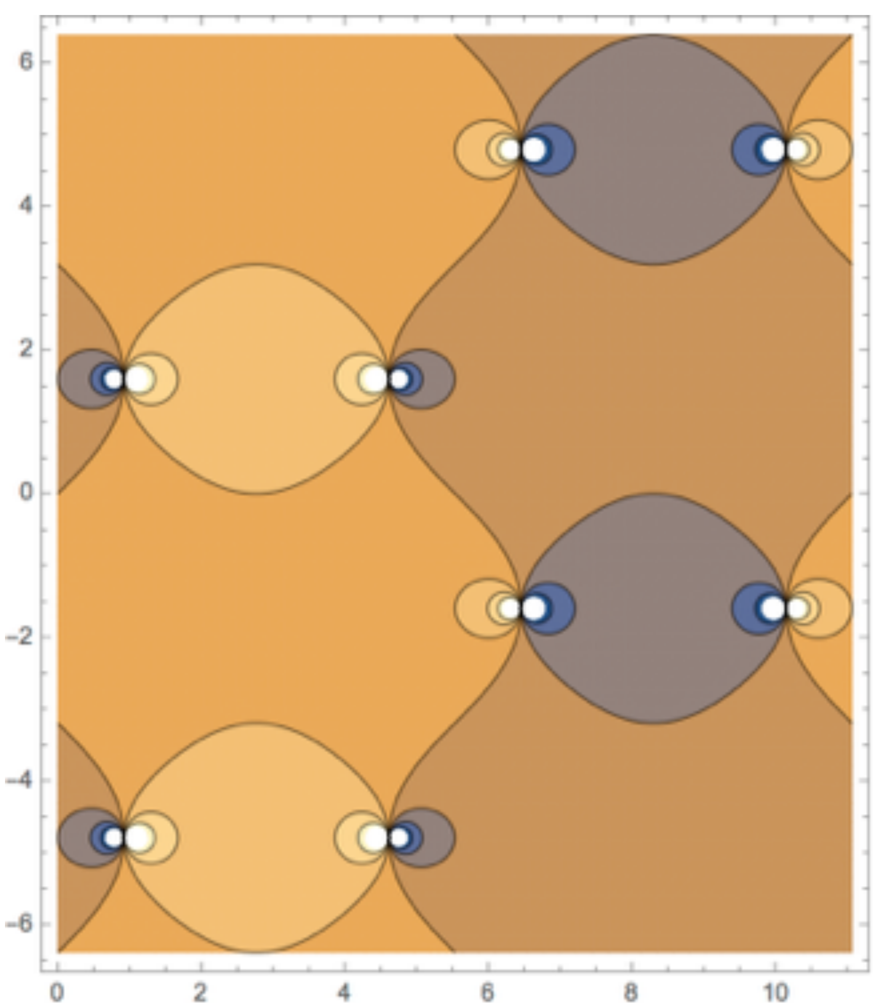


$|q(z)|$ $\quad$ $\Re(q(z))$ $\quad$ $\Im(q(z))$

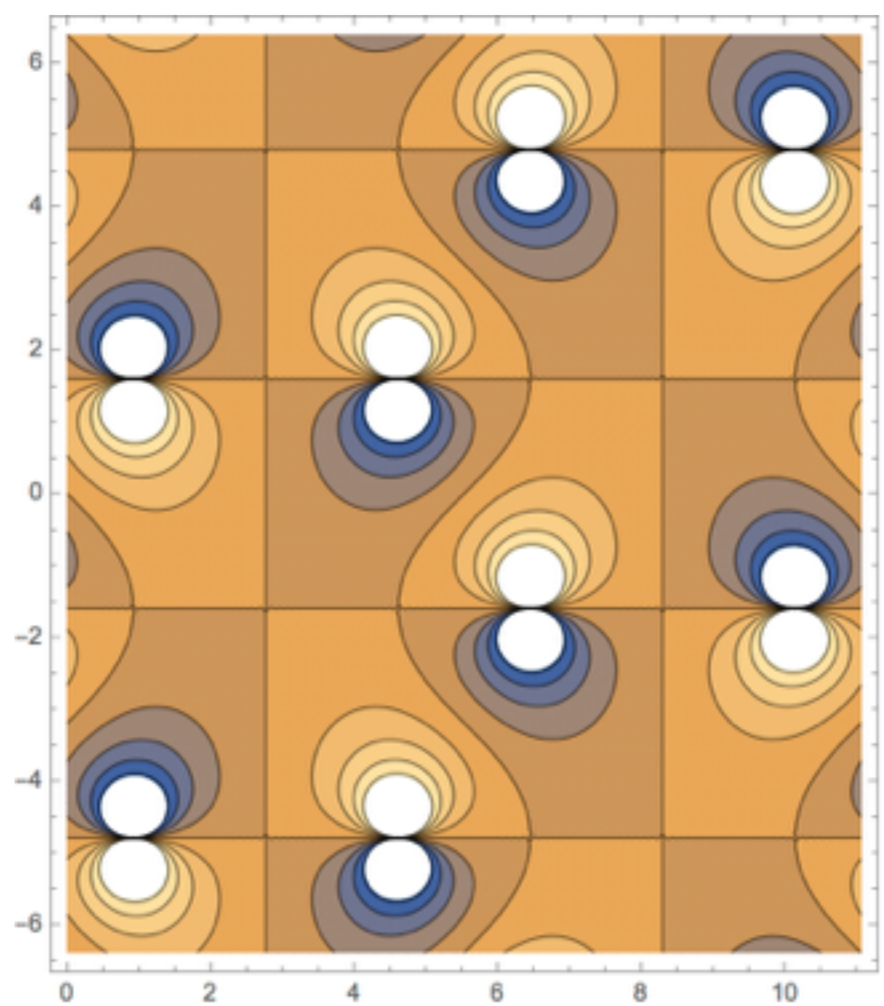
複素時間平面上の Lemniscate解



$|q(z)|$

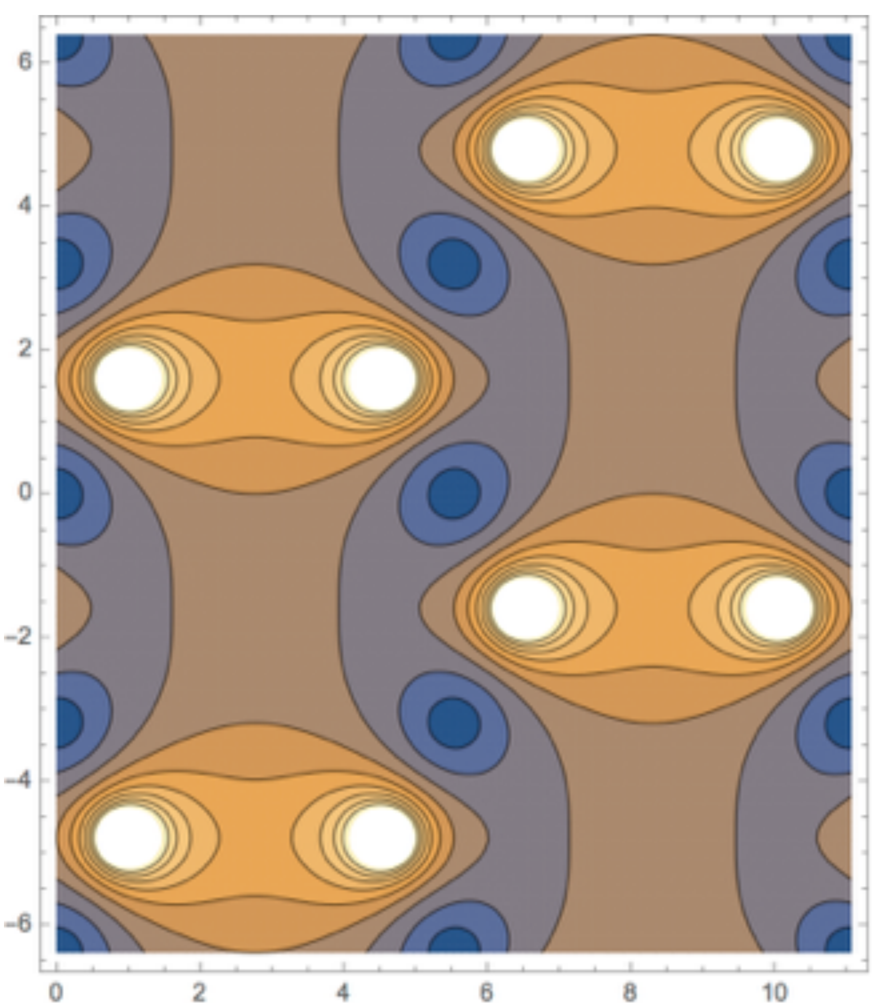


$\Re(q(z))$

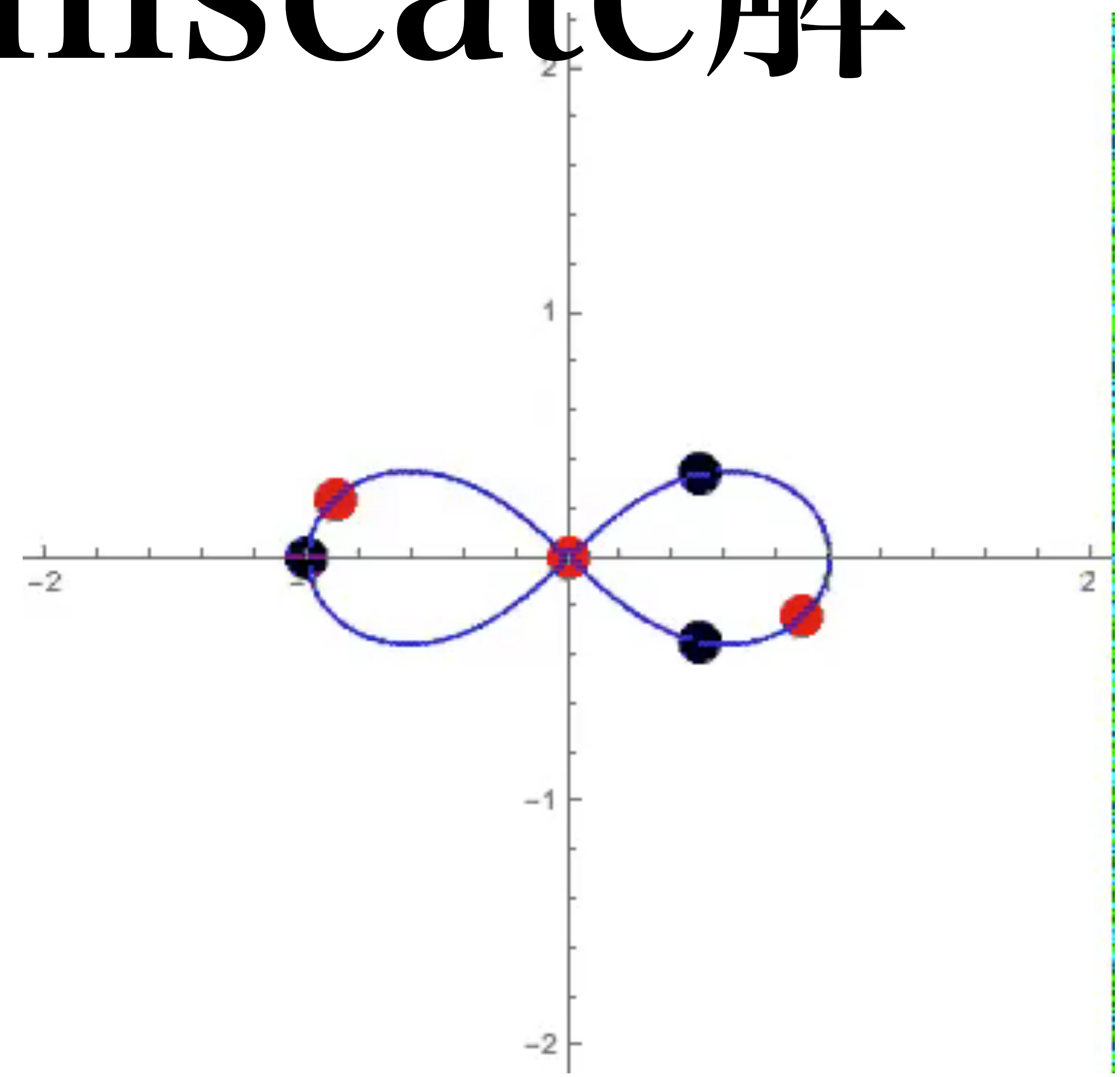


$\Im(q(z))$

複素時間平面上の Lemniscate解



$|q(z)|$



$\{q(t+i\tau) \text{ for } 0 \le t \le 4K\}$

movie for $0 \le \tau \le 4K'$

1次元等質量3体

問題

$$q_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3.$$

$$H = \frac{1}{2} \sum \dot{q}_k^2 - \frac{1}{36} \sum \frac{1}{(q_i - q_j)^2} = 0.$$

$$\sum q_k = 0,\ \sum q_k^2 = \frac{3}{2}.$$

解答

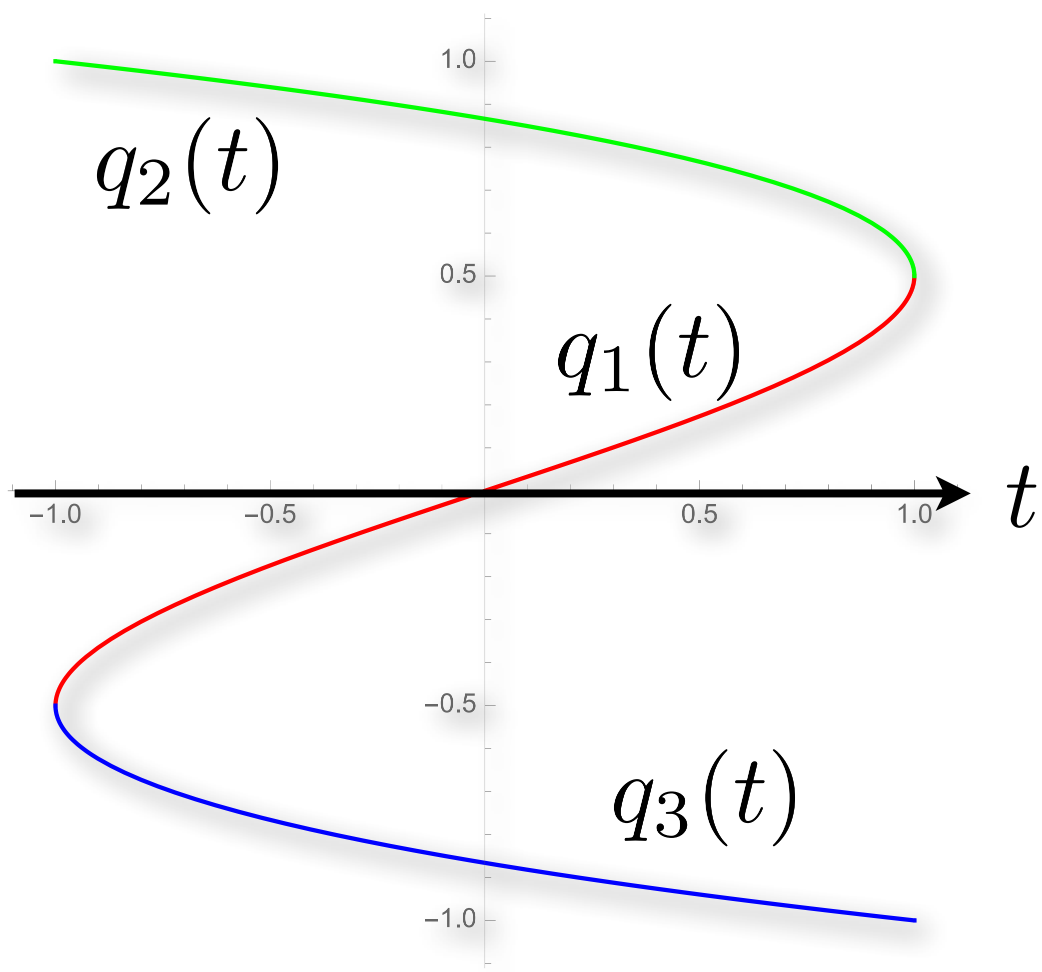
$$q_1(\phi) = \sin(\phi),\ q_2(\phi) = \sin(\phi + 2\pi/3),\ q_3(\phi) = \sin(\phi + 4\pi/3)$$

$$t = \sin(3\phi)$$

1次元等質量3体

$$q_1(\phi) = \sin(\phi),\ q_2(\phi) = \sin(\phi + 2\pi/3),\ q_3(\phi) = \sin(\phi + 4\pi/3)$$

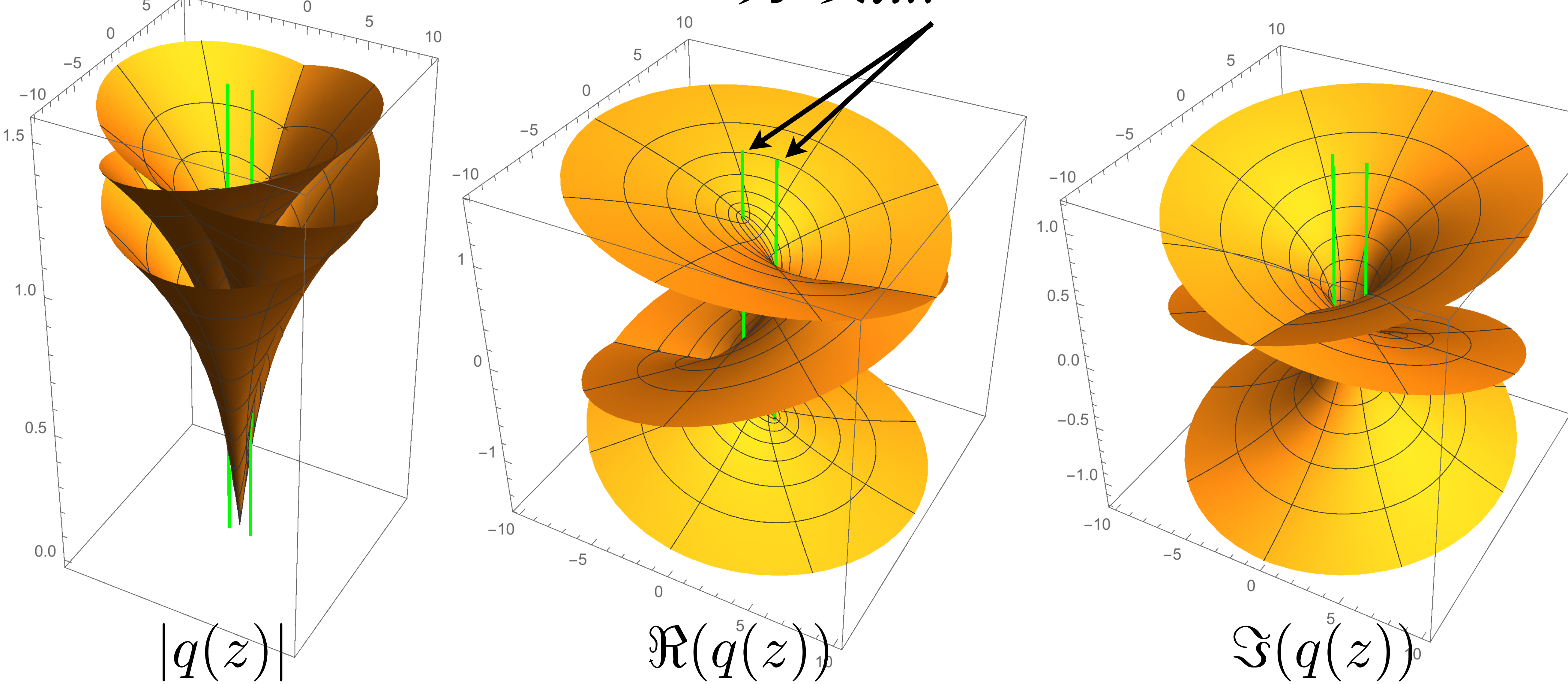
$$t = \sin(3\phi) = -q_k(4q_k^2 - 3)$$



1本の曲線 $t = -q(4q^2 - 3)$ **の上に乗っている**

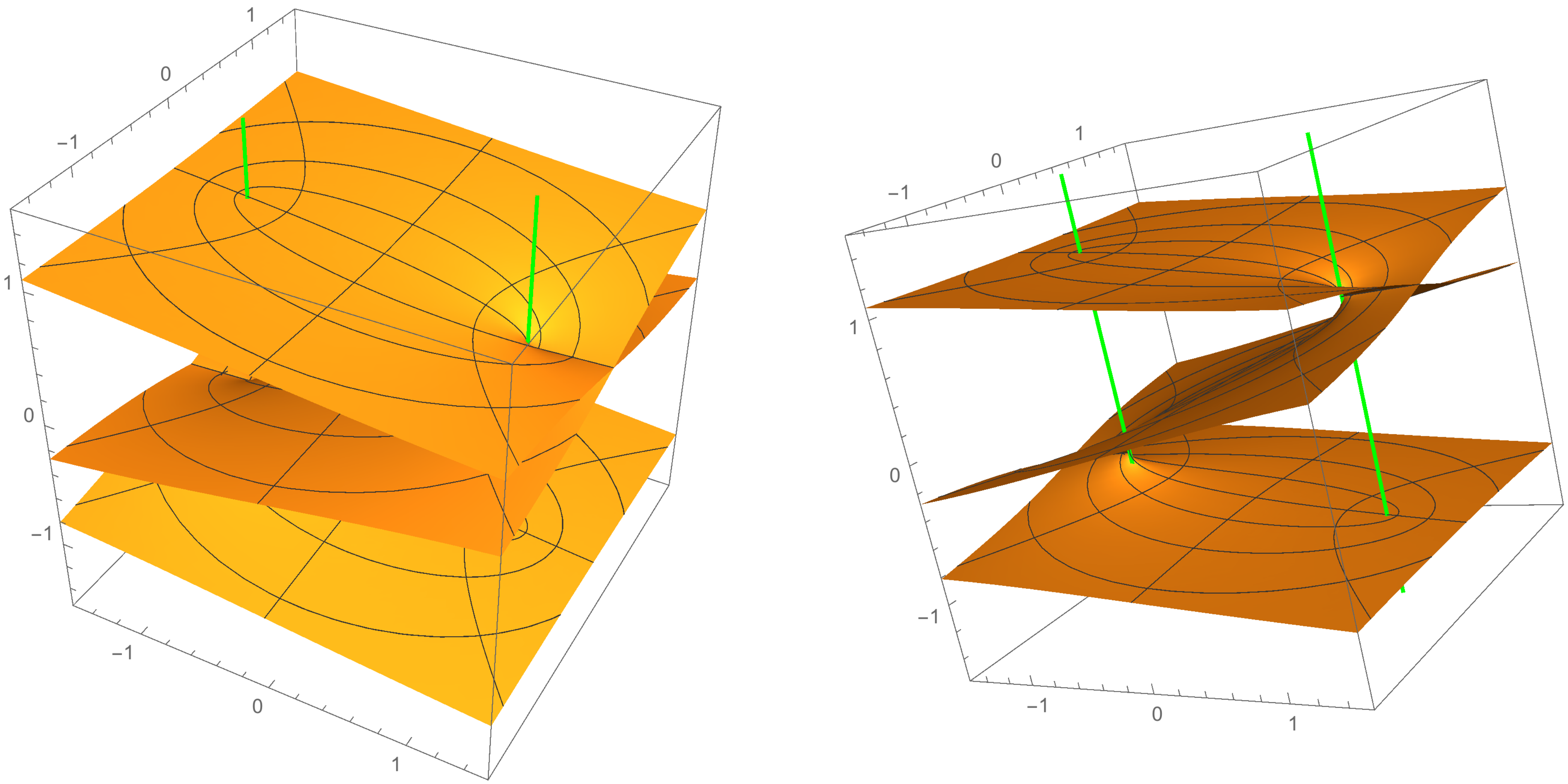
1次元等質量3体

分岐点：$z = \pm 1$



$z = -q(4q^2 - 3)$ で定義されるRiemann面に乗っている

1次元等質量3体



$\Re(q(z))$ 分岐点近くの様子

複素時間平面での
3体8の字解

3体8の字解

$$H = \frac{1}{2}\sum |\mathbf{q}_k|^2 - \frac{1}{2}\sum \frac{1}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2}$$

強い力のポテンシャル

$$\frac{d\mathbf{q}_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_k}, \quad \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_k}$$

8の字解の初期値：$\{\mathbf{q}_k(0), \mathbf{p}_k(0)\}$

$$\sum \mathbf{q}_k = 0, \sum \mathbf{q}_k \times \dot{\mathbf{q}}_k = 0,$$

$$\Rightarrow H = 0, \; I = \sum |\mathbf{q}_k|^2 = \text{constant}$$

3体8の字解

複素化 $t \to z \in \mathbb{C}$

$$\mathbf{q}_k = (x_k(z), y_k(z)) \in \mathbb{C}^2 \leftrightarrow q_k = x_k + iy_k, q_k^\dagger = x_k - iy_k.$$

$$\mathcal{L} = 2L = \sum \frac{dq_k}{dz}\frac{dq_k^\dagger}{dz} + \sum \frac{1}{(q_i - q_j)(q_i^\dagger - q_j^\dagger)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{H} = 2H = \sum p_k^\dagger p_k - \sum \frac{1}{(q_i - q_j)(q_i^\dagger - q_j^\dagger)}$$

$$\frac{dq_k}{dz} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \ \frac{dp_k}{dz} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \ \text{ and for } q_k^\dagger, p_k^\dagger.$$

8の字解の初期値： $\{q_k(0), q_k^\dagger(0), p_k(0), p_k^\dagger(0)\}$

3体8の字解

複素化についての註:

複素化 $t \to z \in \mathbb{C}$

$$\mathbf{q}_k = (x_k(z), y_k(z)) \in \mathbb{C}^2 \leftrightarrow q_k = x_k + iy_k, q_k^\dagger = x_k - iy_k.$$

$q_k^\dagger(z)$ は $q_k(z)$ の複素共役ではない．$q_k, q_k(z)^\dagger$ は，上で定義された $x_k(z)$ と $y_k(z)$ の独立な線形結合で，独立変数．どちらも z の解析関数．

独立変数として，$x_k(z), y_k(z) \in \mathbb{C}$ を使って，

$$L = \frac{1}{2}\sum\left(\left(\frac{dx_k}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy_k}{dz}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

としても構わない．この式のどこにも複素共役は出てこない．

これを x_k, y_k と 1 対 1 対応な線形結合 $q_k, q_k^\dagger$ で書き直したのが，前ページの Lagrangian.

数値計算への註：

数値計算には Mathematica の NDSolve を用いた．ヘルプに「NDSolve の微分方程式には，複素数を使うことができる.」とあるように，複素関数を扱うことができる．しかし，積分の始点，終点は「$\{x, x_{\min}, x_{\max}\}$」と書かれているように，実数で与えなければいけないようだ．そこで，運動方程式

$$\frac{dq_k}{dz} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k},\ \frac{dp_k}{dz} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}\ \text{ and for } q_k^\dagger, p_k^\dagger.$$

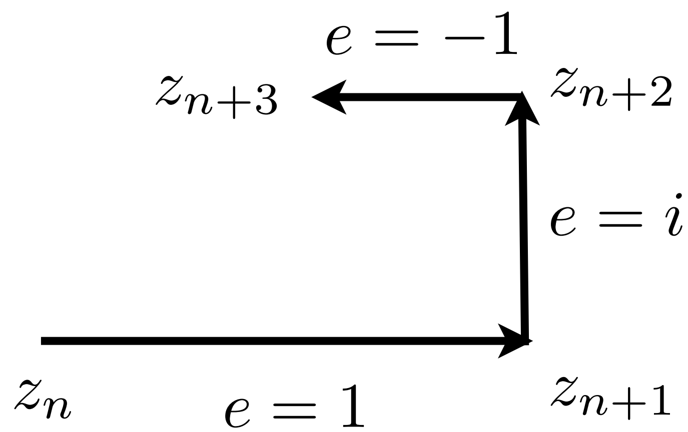
を始点 z_i から z_f まで積分する際には，$z_f - z_i = e\sigma_{\max}$, $\sigma_{\max} > 0$, $e \in \mathbb{C}, |e| = 1$ として，微分方程式

$$\frac{dq_k}{d\sigma} = e\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k},\ \frac{dp_k}{d\sigma} = -e\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}\ \text{ and for } q_k^\dagger, p_k^\dagger.$$

を $\{\sigma, 0, \sigma_{\max}\}$ の範囲で積分した．

数値計算への註：続き

実際には，斜めの積分路は使っておらず，$e=\pm 1, \pm i$，つまり実軸に平行か虚軸に平行な経路を組み合わせて，積分を実行した．



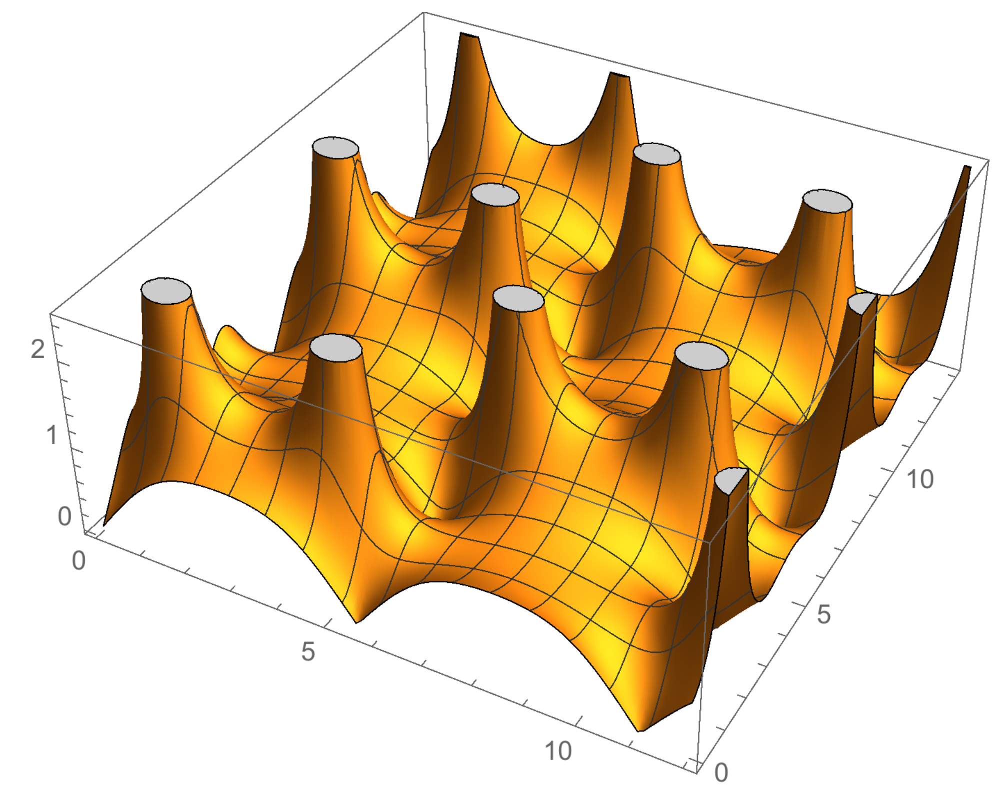
z_n での $\{q, q^\dagger, p, p^\dagger\}_n$ を初期値として，NDSolve で z_{n+1} まで積分し，そこでの値 $\{q, q^\dagger, p, p^\dagger\}_{n+1}$ を得る．次にそれを初期値として，NDSolve で z_{n+1} から z_{n+2} まで積分し，... 以下同様.

積分路がこのようにカクカクしていても問題はない．どの方向に微分しても微係数が同じになるのが，解析関数だから．(分岐点では問題あり)

数値計算への註：続き

数値計算の方法が間違っていないことを確認するために，Lemniscate 上の 8 の字解をその Hamiltonian と $z=0$ での初期値を使って，数値計算で再現したのが，下の図．解の絶対値が示されている．

解の様子が正しく再現されているのが見て取れる．



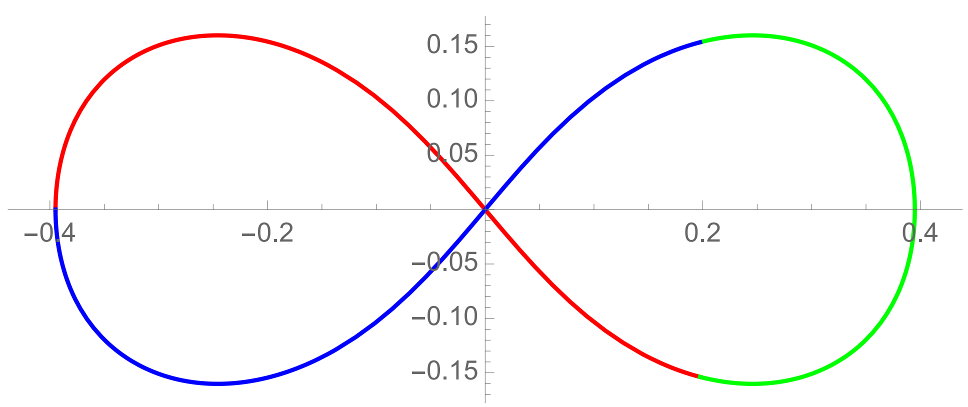
実軸方向は周期より少し長め，虚軸方向は周期の 2 倍より少し長めに計算した．各々の方向に 100 点，全体で 10,000 点の値を計算し，Mathematica の ListPlot3D で表示した．

この計算では，初期値の精度は 34 桁，計算精度は 40 桁とした．

3体8の字解

$$\{q_k(0), q_k^\dagger(0), p_k(0), p_k^\dagger(0)\}$$

$$T = 1$$



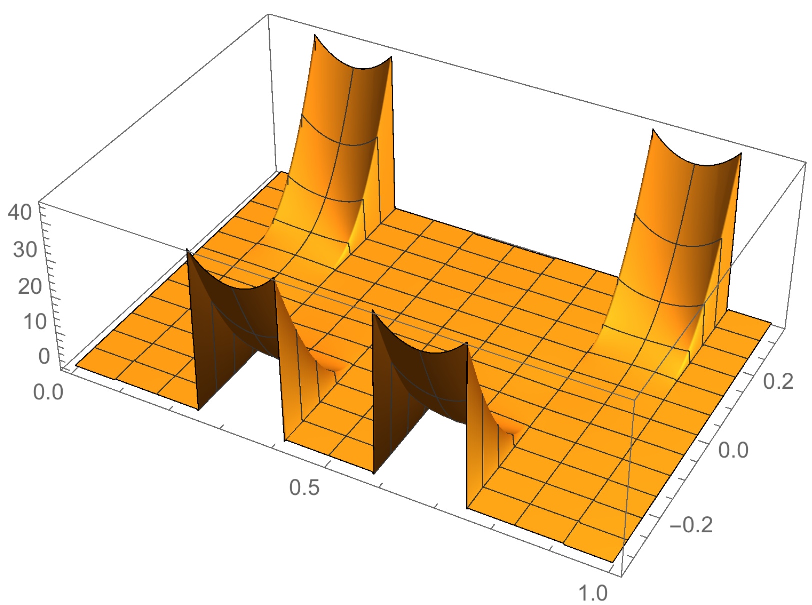
初期値の精度: 38桁程度

$$|q_k(1/3) - q_{k+1}(0)| < 5 \times 10^{-38}$$

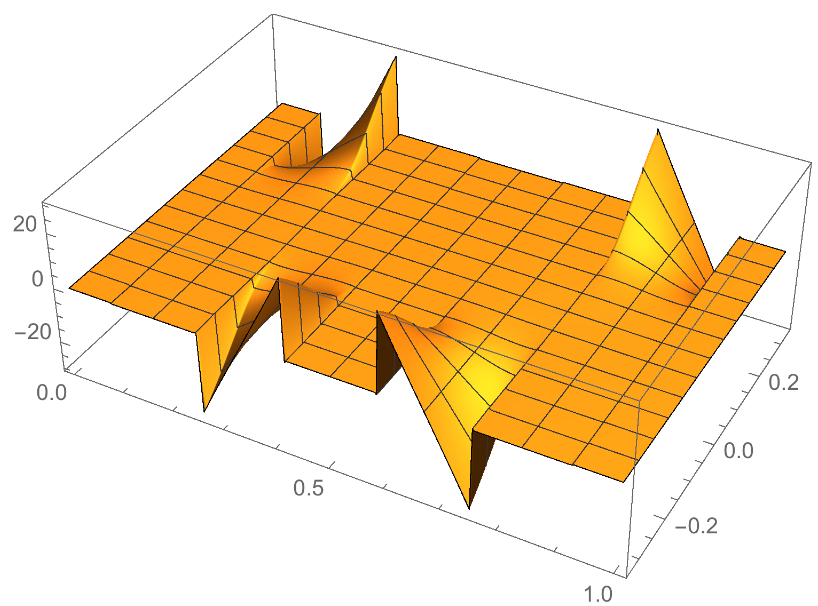
計算の精度: 50桁程度

3体8の字解

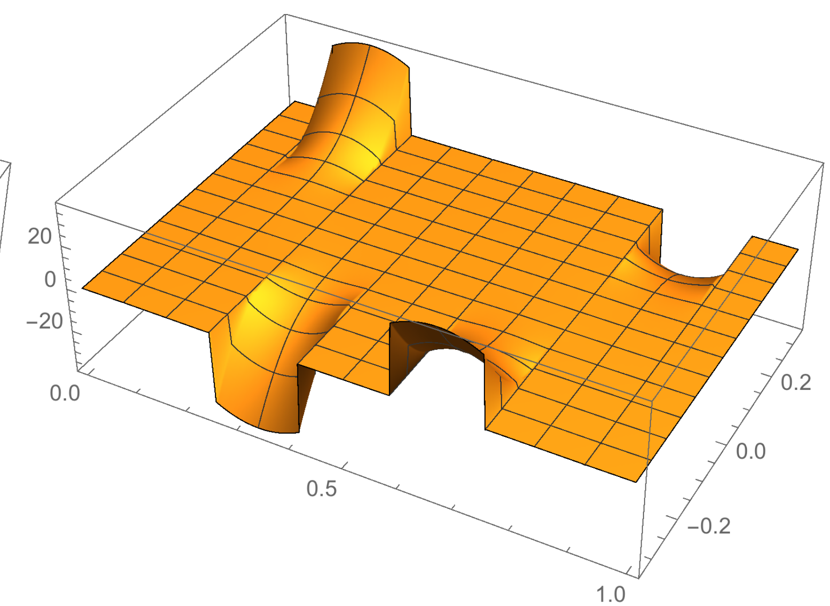
$q(z)$ の概要



$|q(C;z)|$



$\Re(q(C;z))$



$\Im(q(C;z))$

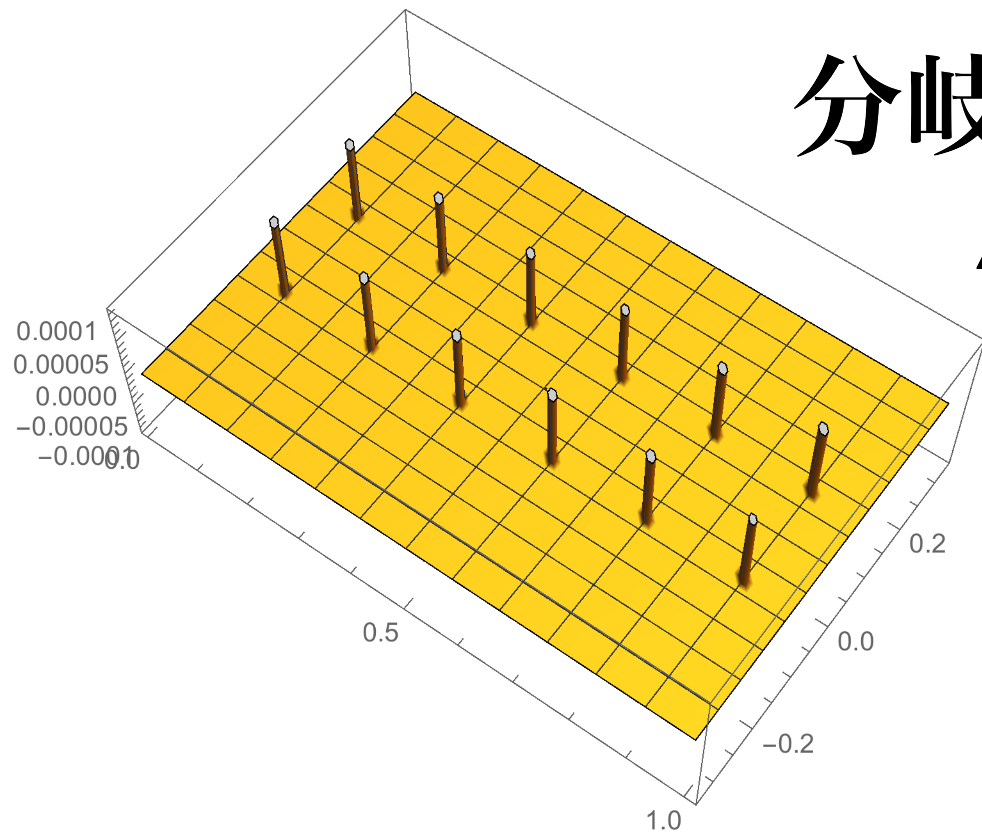
$z = t + i\tau$

積分経路: C

$0 \longrightarrow t$

3体8の字解

$q(z)$ の分岐点の概要

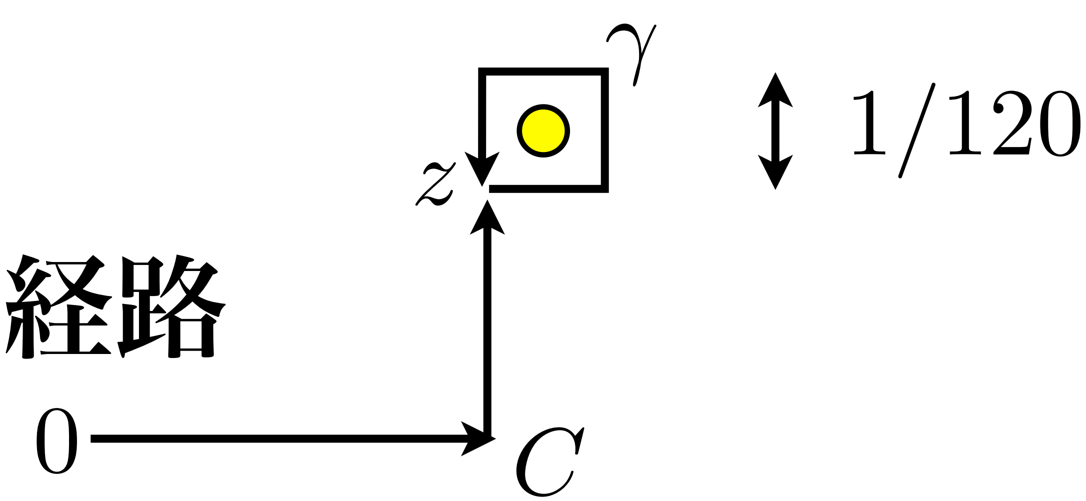


分岐点

$$\Delta q = q(C\gamma; z) - q(C; z)$$
$$\neq 0$$

$|\Im(z)| < 0.08$ **では正則**

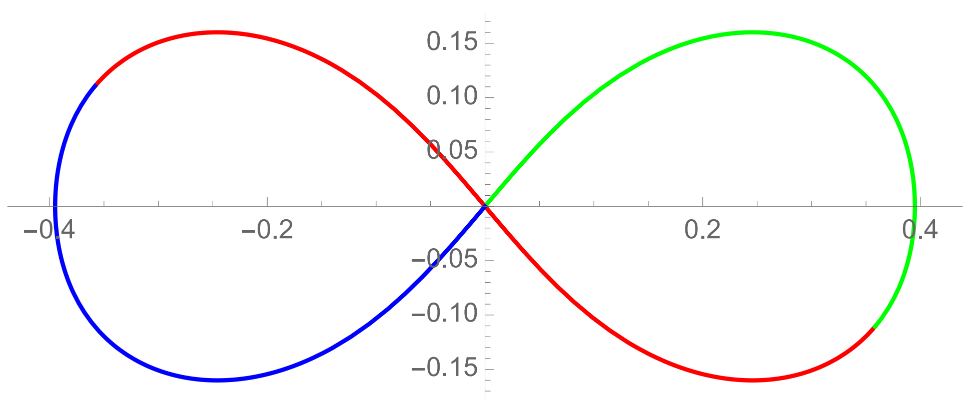
積分経路



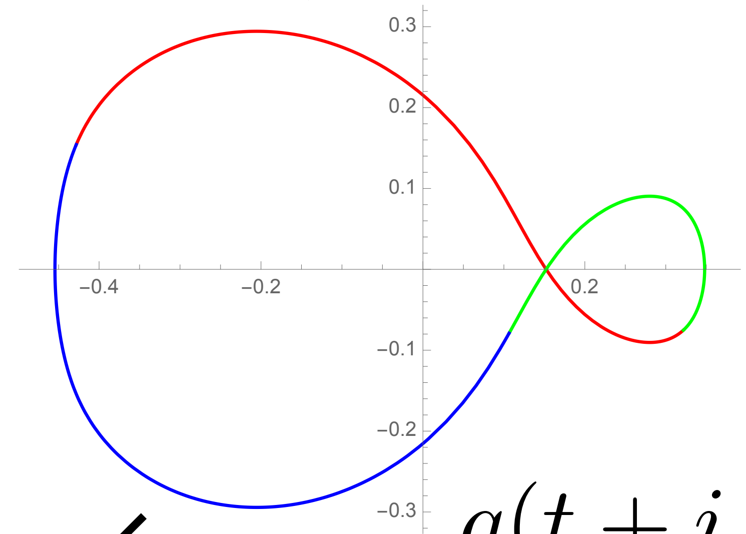
3体8の字解

$q(z)$ の分岐点の概要

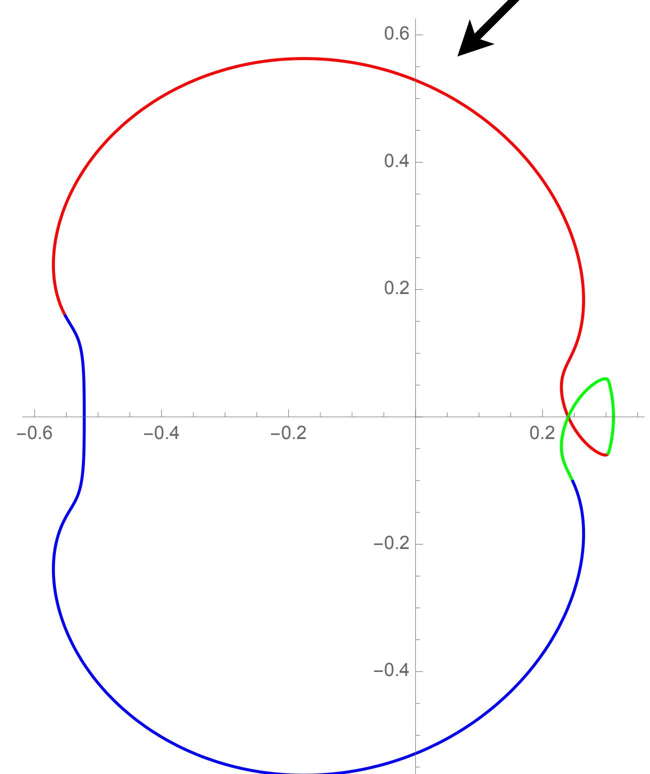
$|\Im(z)| < 0.08$ では正則



$q(t)$



$q(t+i/25)$



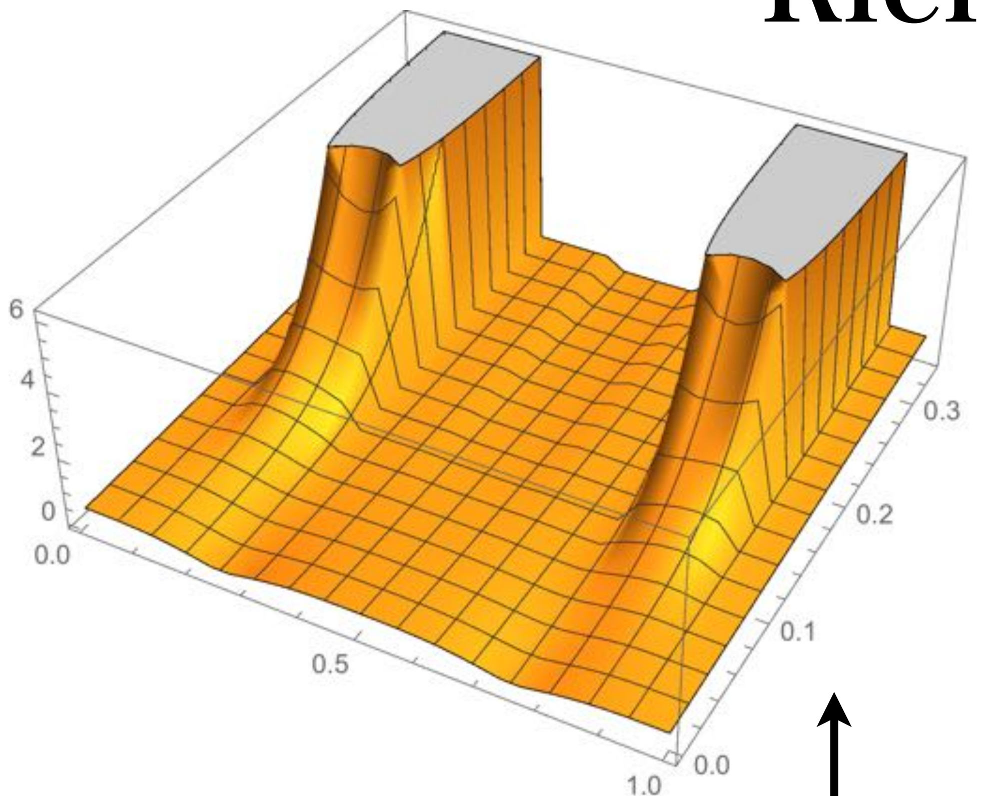
$q(t+2i/25)$

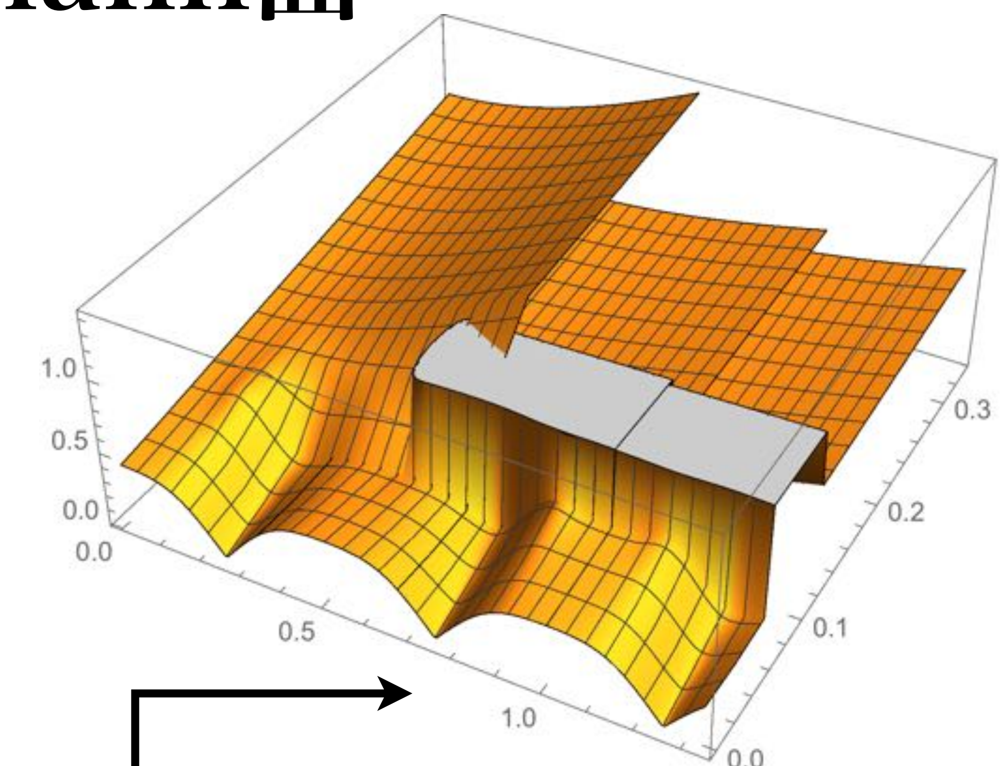
この図のつなぎめ

はEuler点の t

経路に依存する積分値

$\Longrightarrow$Riemann面





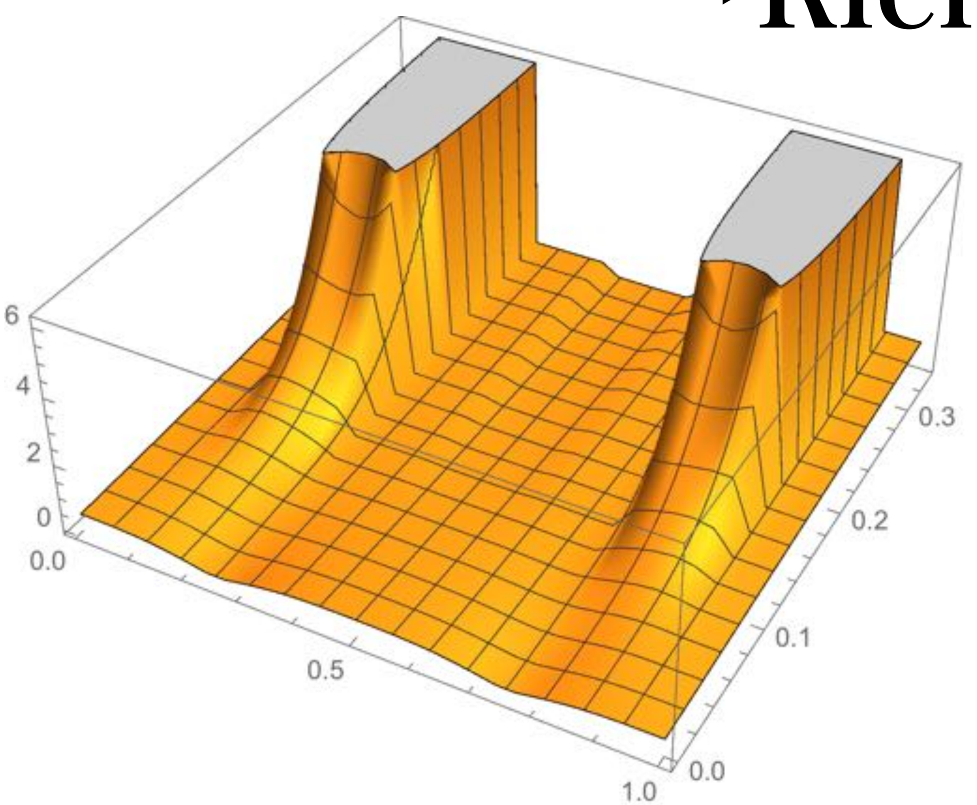
周期性： $q(t+1)=q(t)\Rightarrow q(z+1)=q(z)?$

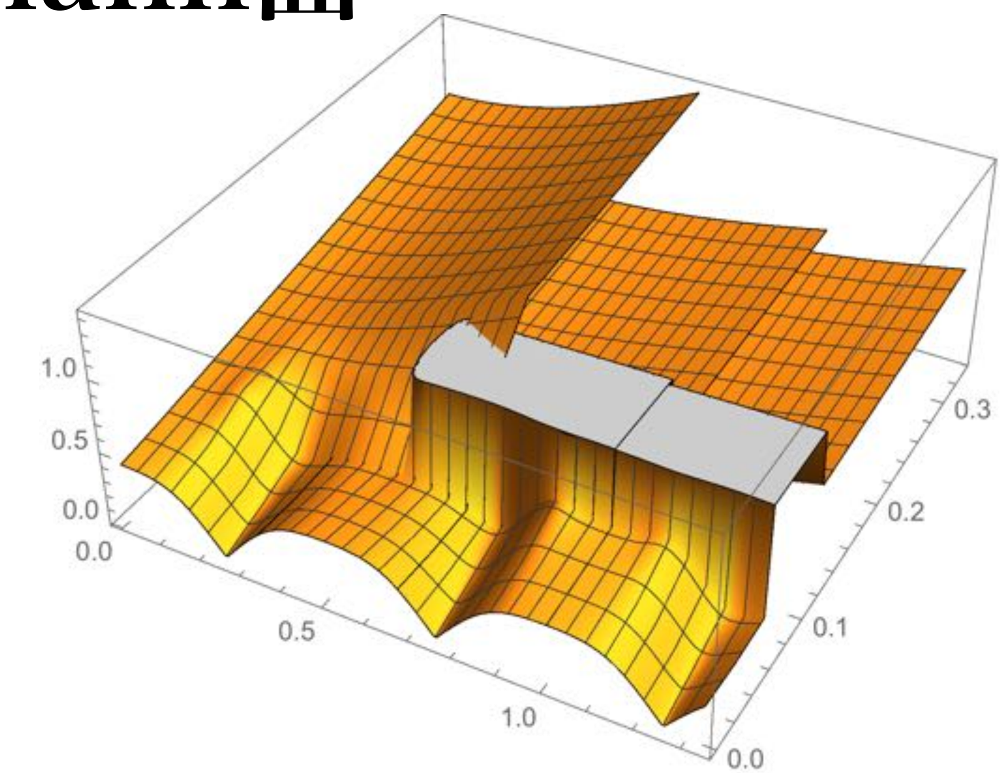
No or Yes

どの枝を取るかによる

経路に依存する積分値

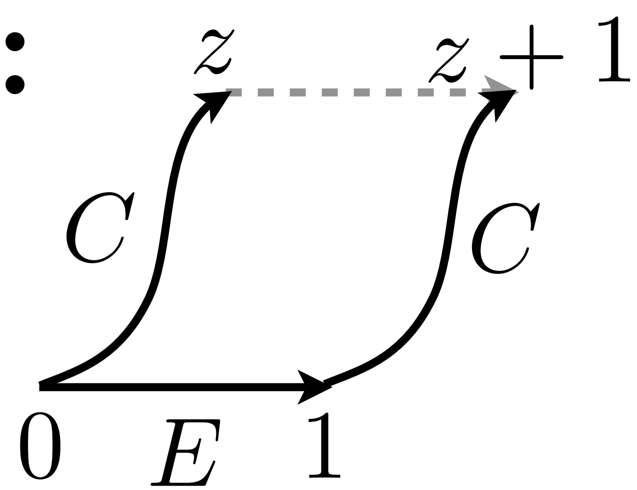
⇒Riemann面





$$f(t+1)=f(t)\Rightarrow f(EC;z+1)=f(C;z)$$

周期性：



$$\neq f(CE;z+1)$$

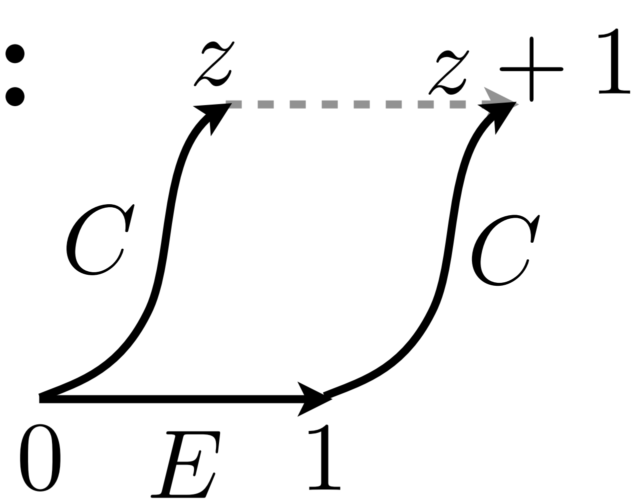
次ページ以降に周期性についての註あり

経路に依存する積分値．周期性についての註:

分岐点がある場合には，どういう経路で積分したかを明示する必要がある．そこで，原点から出発して経路 C に沿って z まで積分した値を $f(C;z)$ と表すことにする．また，原点から経路 C_1 に沿って積分し，次に経路 C_2 に沿って z に至った場合は，経路 C を $C = C_1C_2$ と書き，積分値を $f(C_1C_2;z)$ と書く．

さて，実軸を含む領域で正則で，実軸上で周期 1 を持つ関数 $f(z)$ を考える．実軸上で $f(t+1) = f(t)$ が成立するので，全平面で $f(z+1) = f(z)$ が「成立」するのは間違いないのだが，この関数 f が分岐点を持つ場合は $f(z)$ は多価関数なので，左辺と右辺はどの枝での値かが問題になる．

周期性：



経路に依存する積分値．周期性についての註:つづき

実軸上で成立する等式 $f(t+1)=f(t)$ を，上の記法で書くと，

$$f(EE^t;t+1)=f(E^t;t).$$

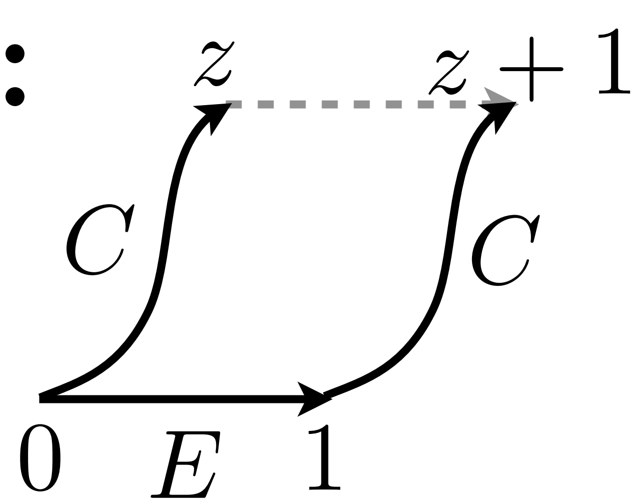
ここで E は実軸上で 1 だけ進む経路，E^t は実軸上で t 進む経路.

これをさらに C_1（t から進めば z に至り，$t+1$ から進めば $z+1$ に至る）に沿って積分すれば，$f(EE^tC_1;z+1)=f(E^tC_1;z)$. ここで $C=E^tC_1$ と書けば，一般に，

$$f(EC;z+1)=f(C;z)$$

は常に成立する．下図の実線.

周期性：



一方，分岐点がある場合には，一般には $f(EC;z+1)\neq f(CE;z+1)$ なので，

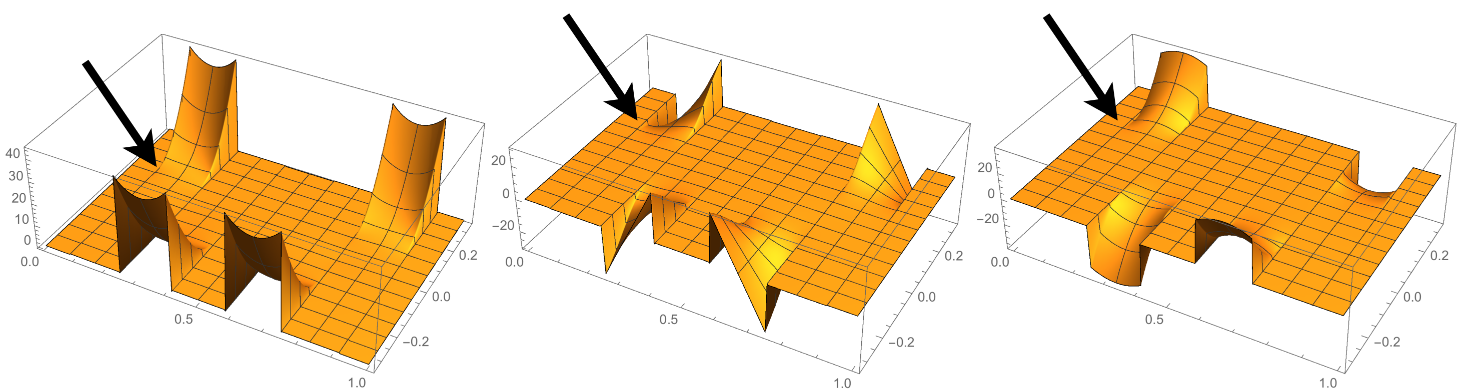
$$F(CE;z+1)\neq f(C;z).$$

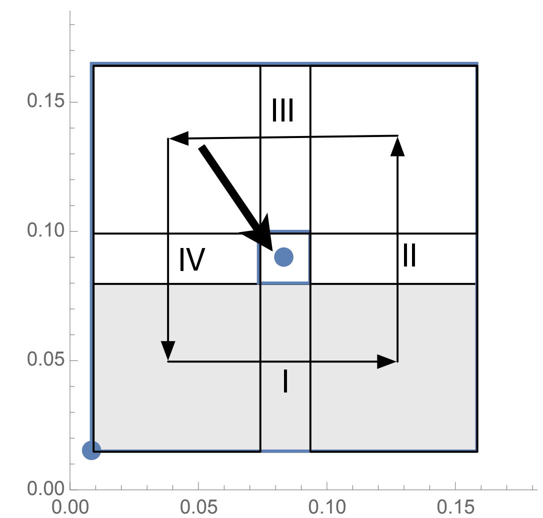
左図の破線.

p25の図も

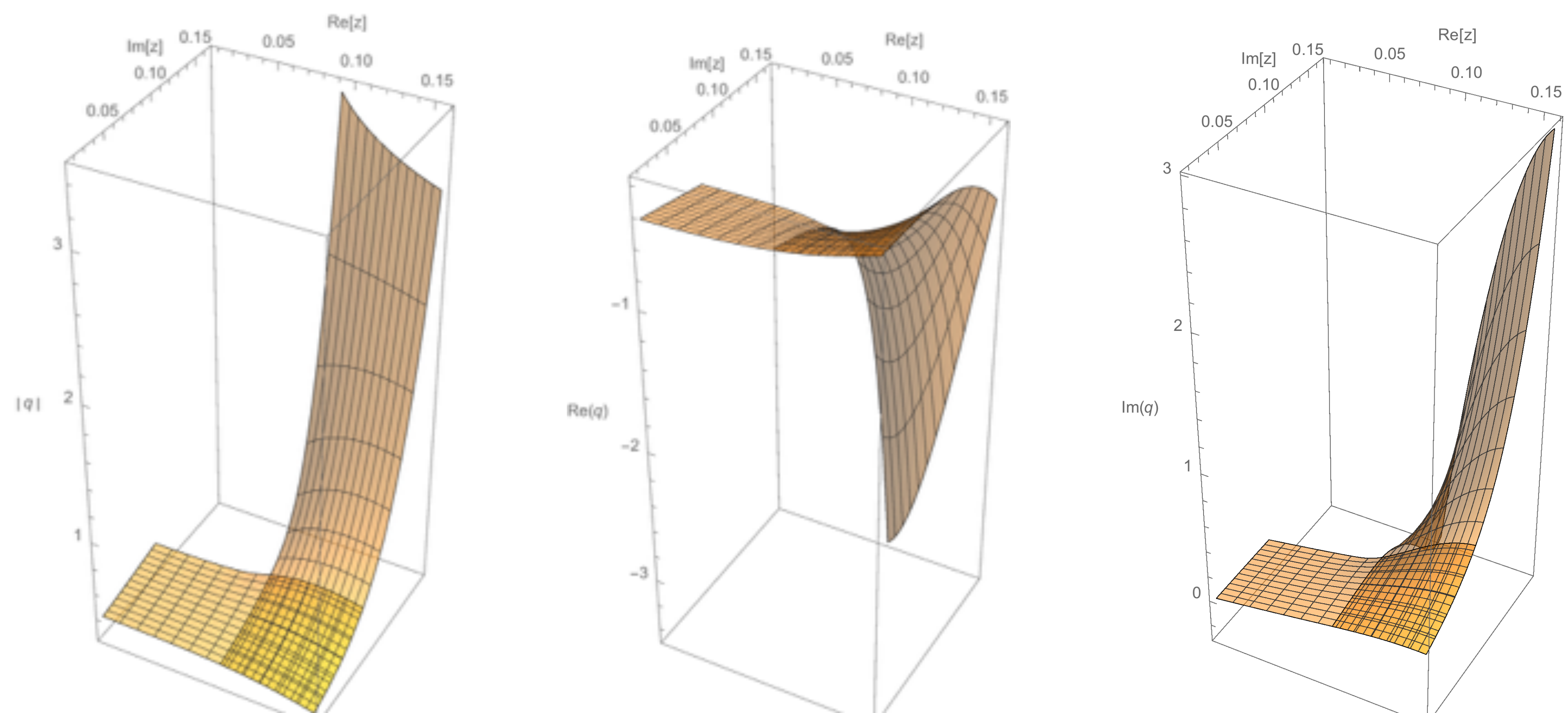
3体8の字解

矢印付近の分岐点の周囲の様子



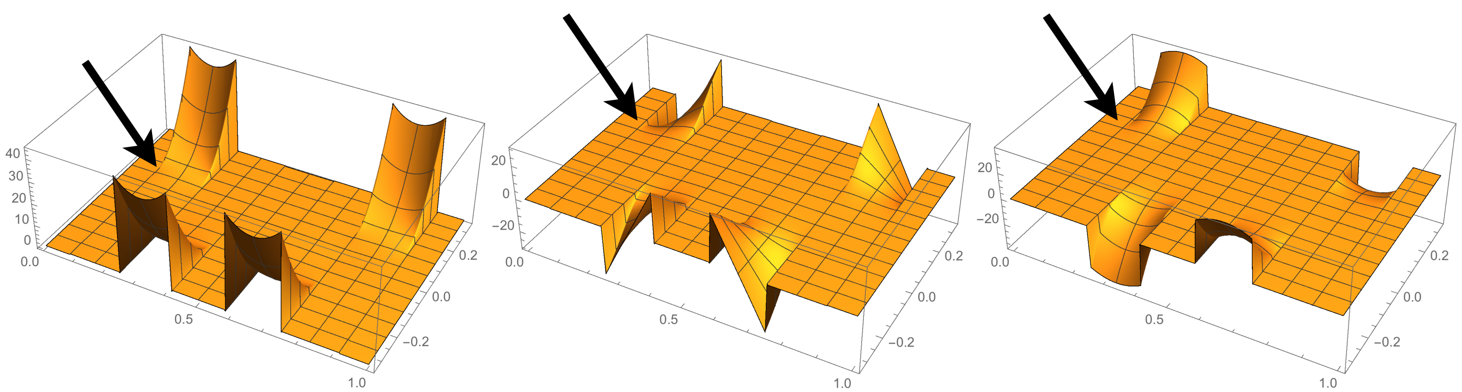


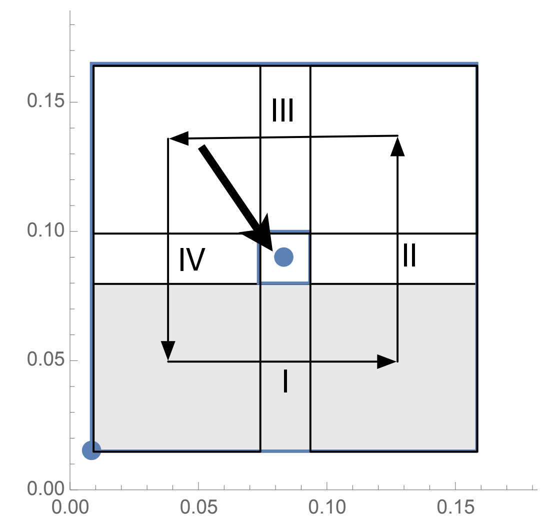
I+II



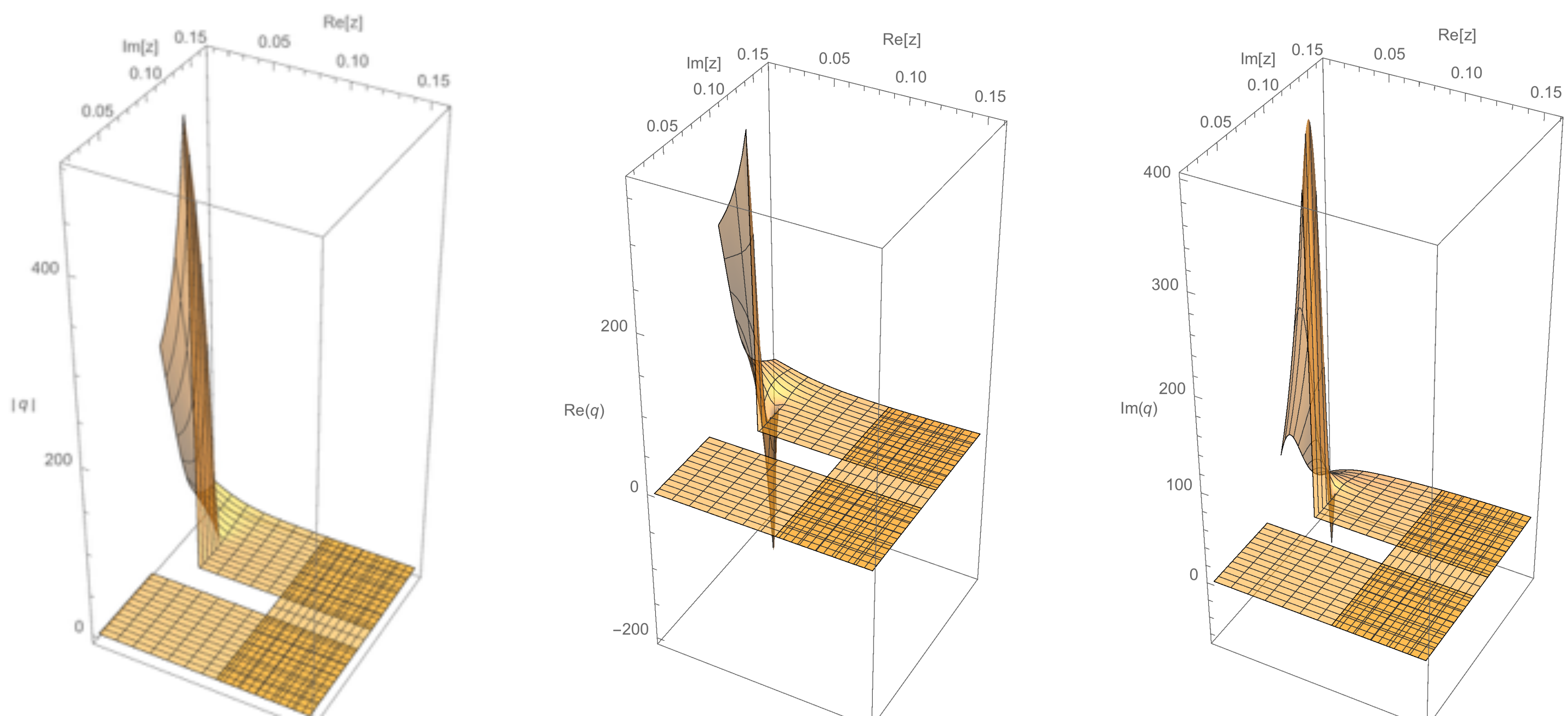
3体8の字解

矢印付近の分岐点の周囲の様子



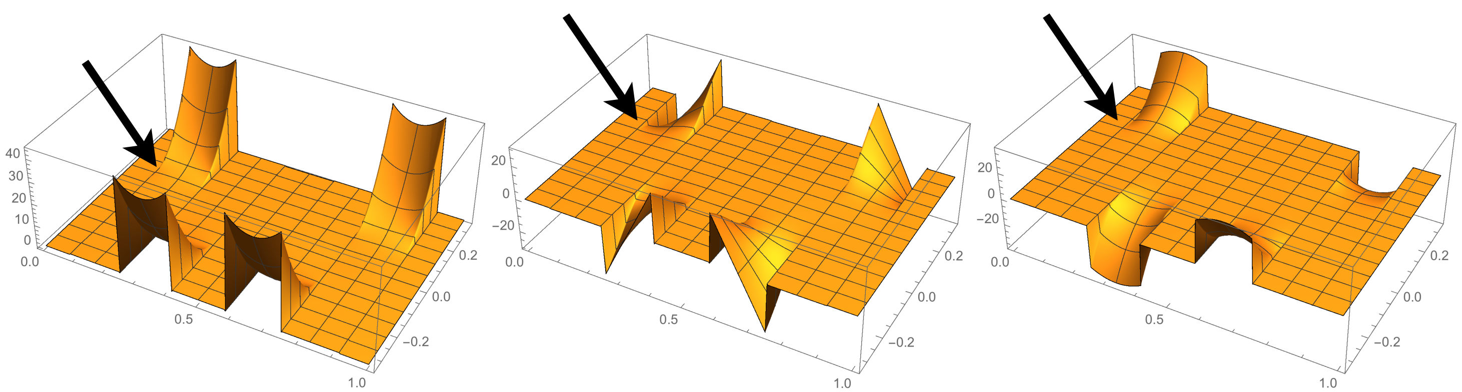


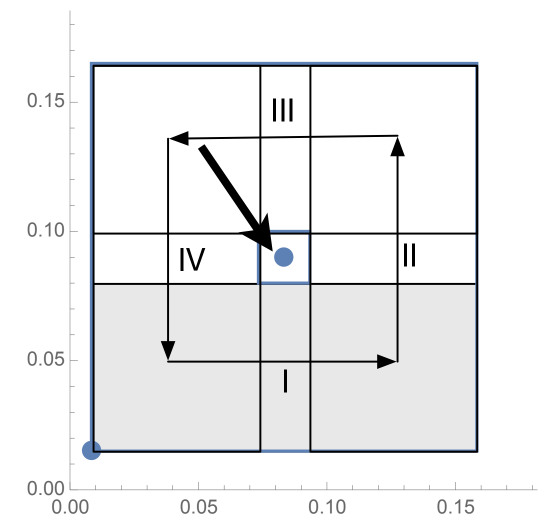
I+II+III



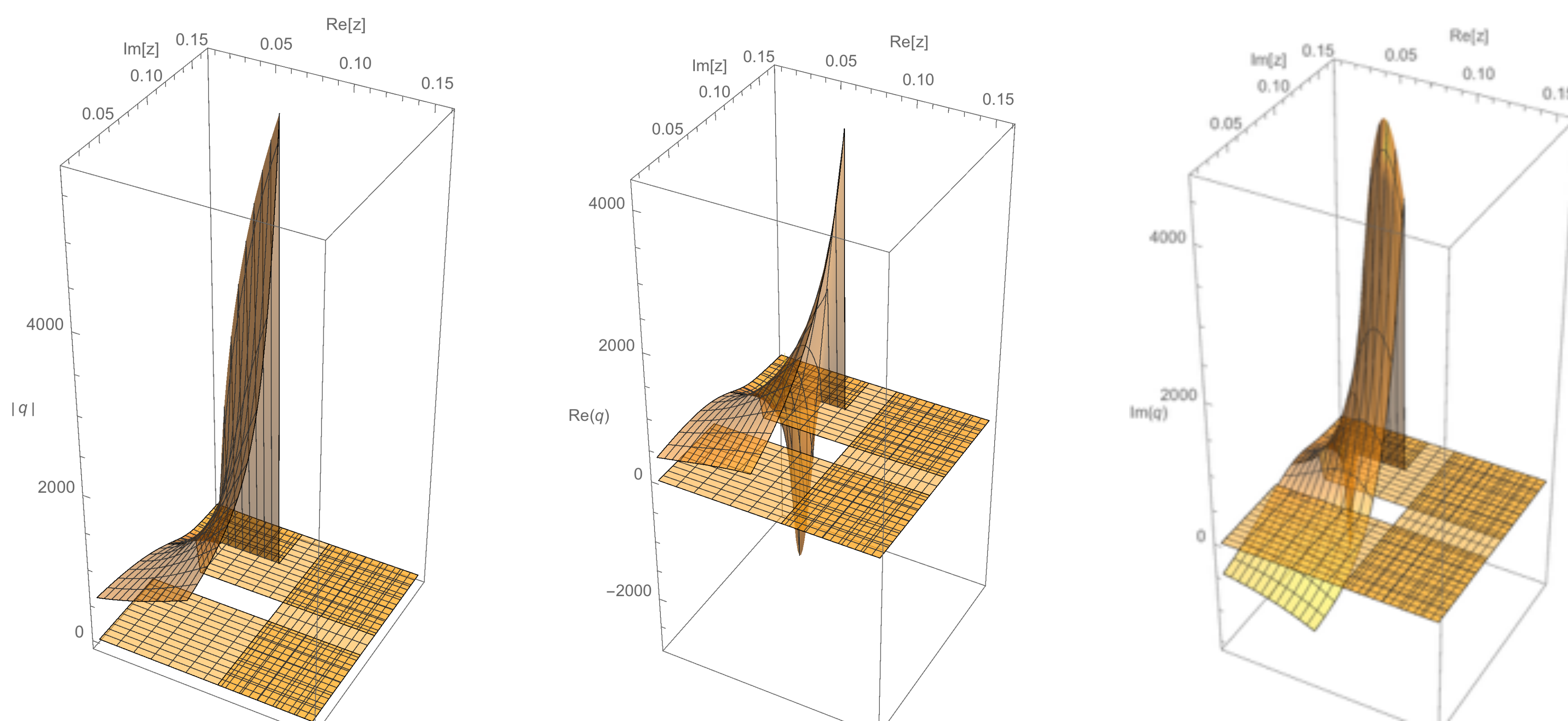
3体8の字解

矢印付近の分岐点の周囲の様子



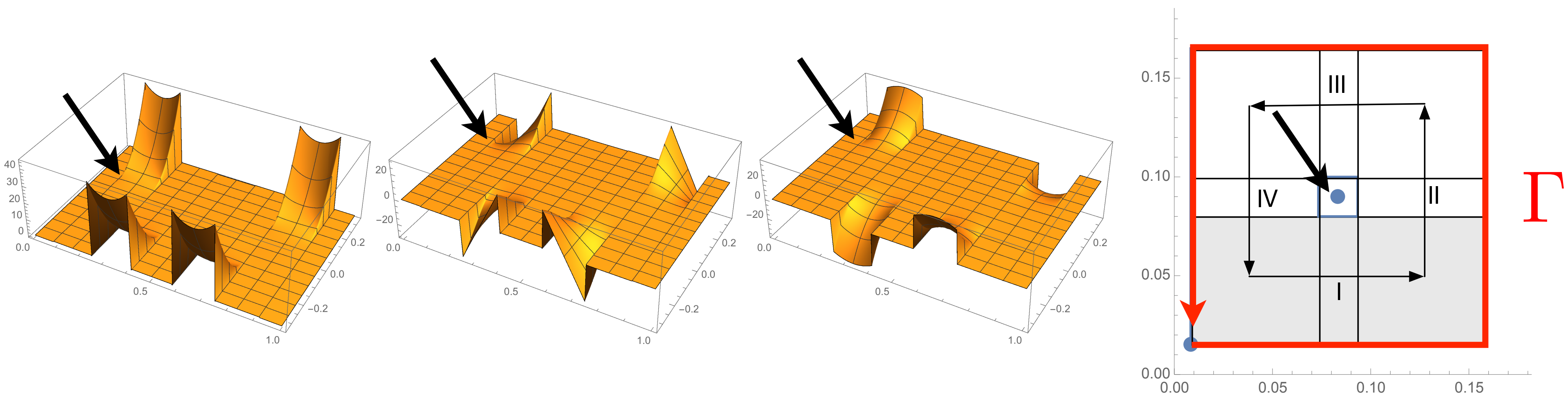


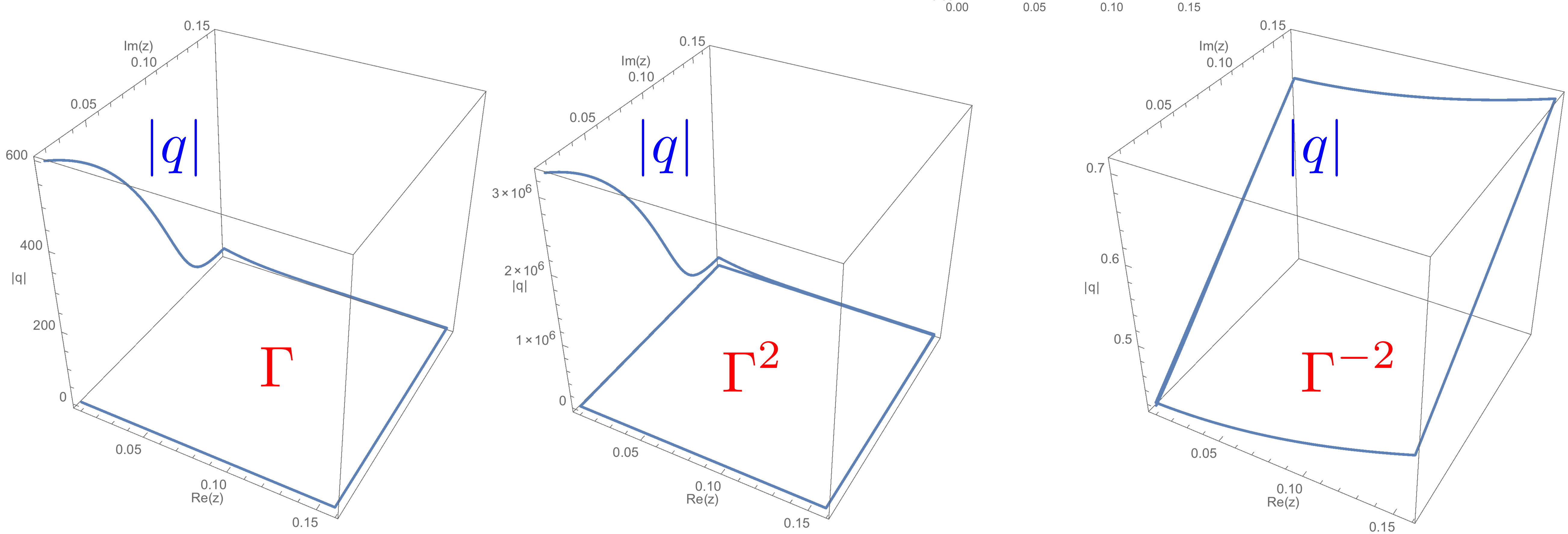
I+II+III
+IV



3体8の字解

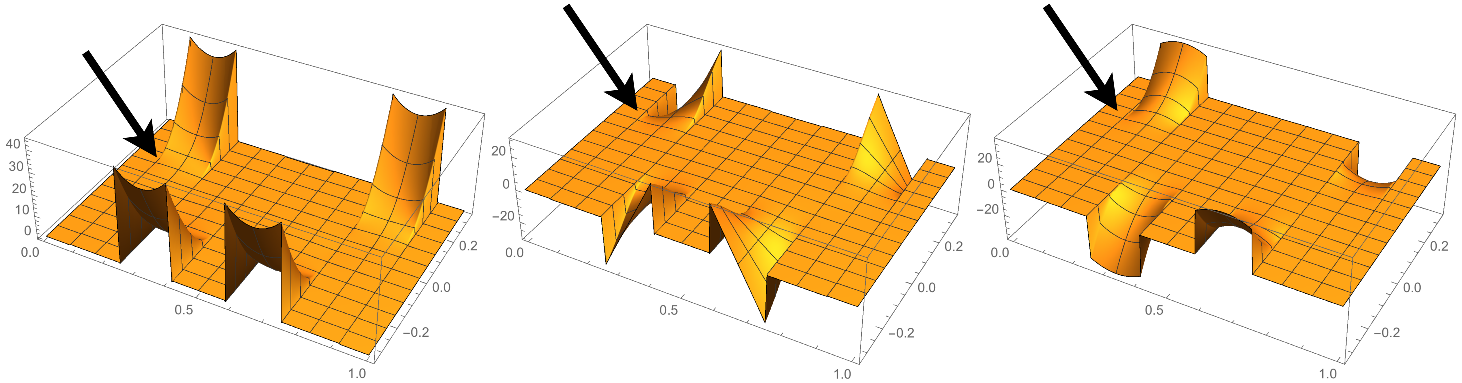
矢印付近の分岐点の周囲の様子

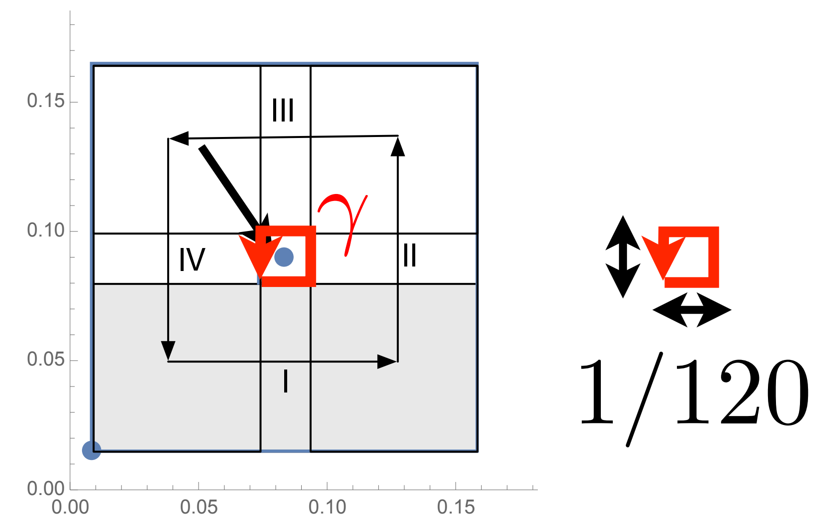


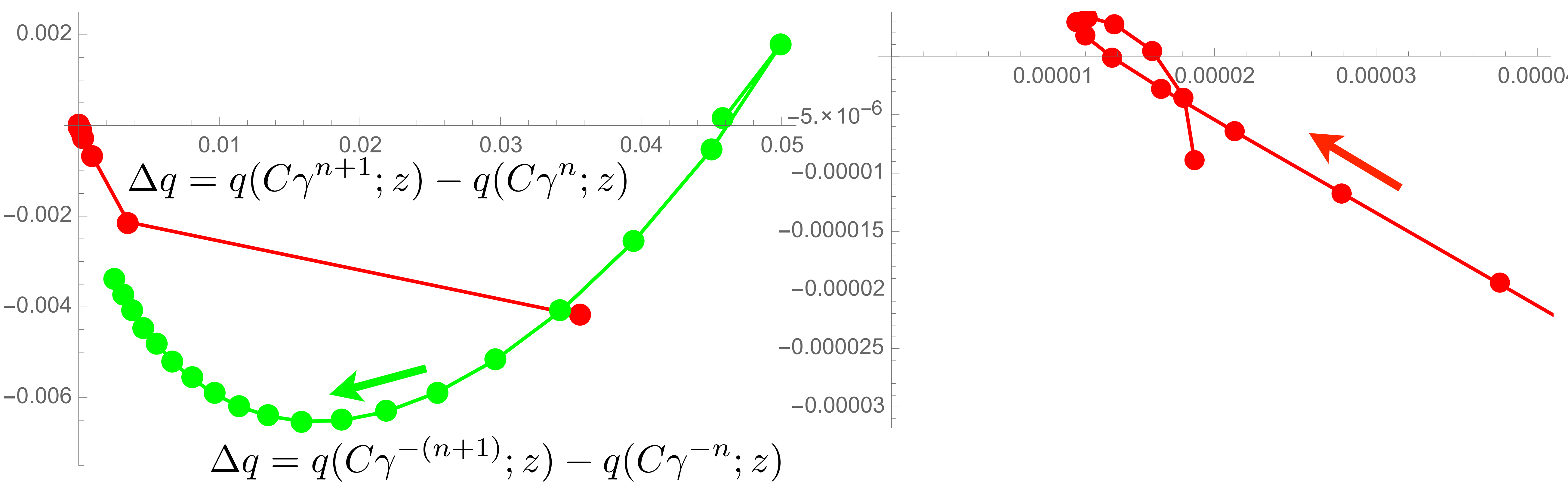


3体8の字解

矢印付近の分岐点の周囲の様子







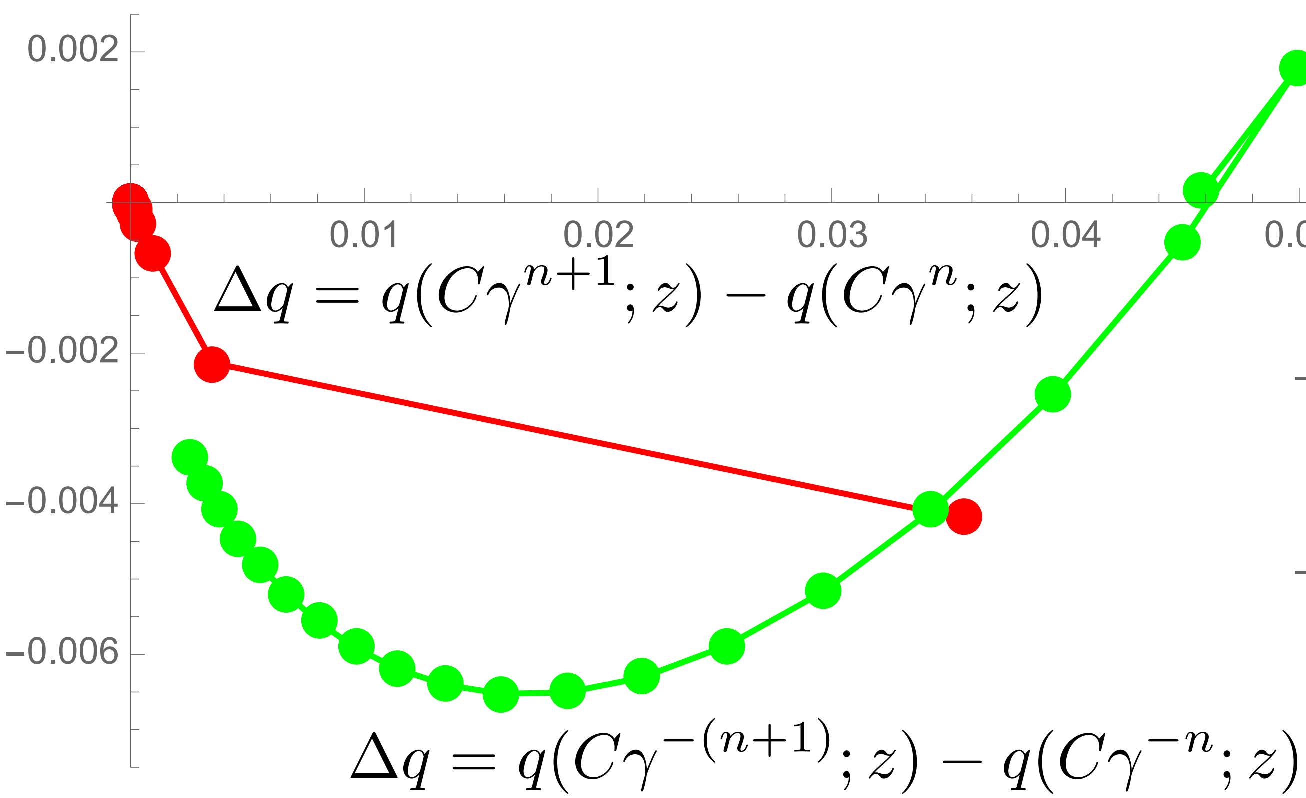
3体8の字解

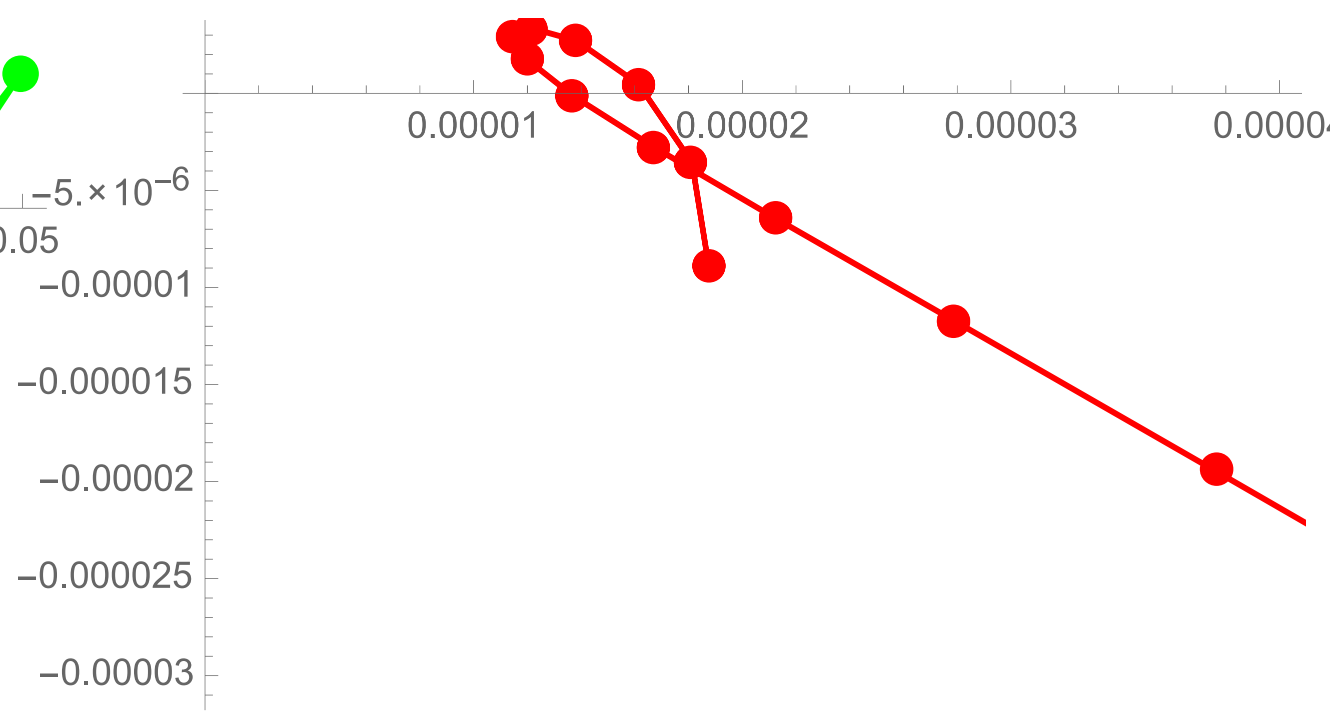
分岐点の周囲の様子

$$\text{if } q(C;z) = g(C;z) + (z-z_0)^{\lambda} h(C;z)$$

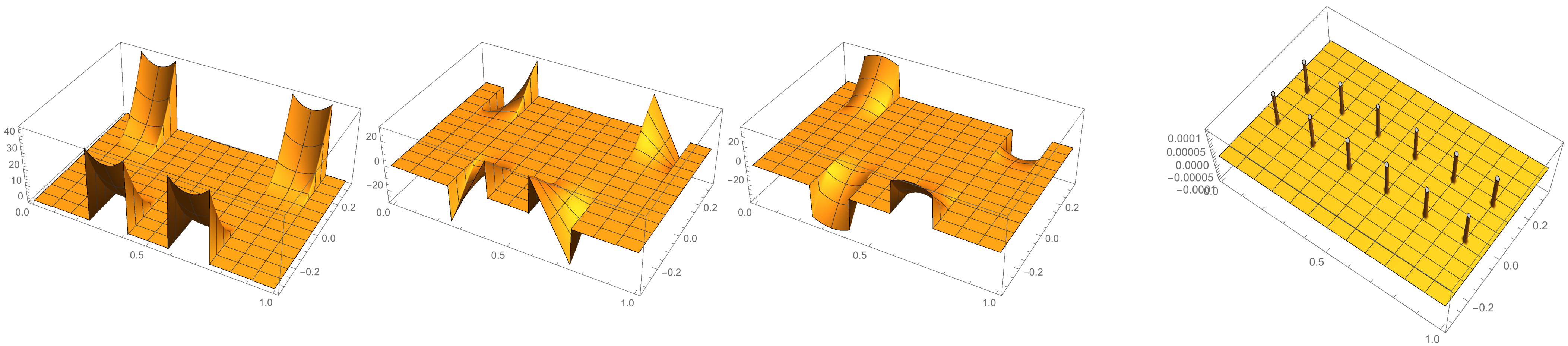
$$\Rightarrow \frac{q(C\gamma^{n+1};z) - q(C\gamma^{n};z)}{q(C\gamma;z) - q(C;z)} = e^{2\pi i \lambda n}$$

$$\lambda \in \mathbb{C}$$





複素時間での3体8の字解



- 分岐点は t=0 から1 の間に少なくとも 12 個存在する
- 分岐点の指数は複素数のように見えるが確定しない
- 分岐点を回って原点に戻り初期値に戻る経路は見つからなかった（来た道を引き返すとか，正則な領域だけを回るのは無し）　$q(C;0) \neq q(0), C$: non trivial closed path
- 極は見当たらない
- 虚数方向に周期はないように見える（述べなかった）